

Exercice 1

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par : $u_1 = \frac{3}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$

- 1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n > \sqrt{2}$
- 2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2} (u_n - \sqrt{2}) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$
 - b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2} (u_n - \sqrt{2})$
 - c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n - \sqrt{2} < \left(\frac{1}{2} \right)^n$

Exercice 2

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = 4n - u_n$.

- 1) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4
- 2) a) Montrer que (u_{2n}) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme
 - b) Déterminer u_{2n} puis u_{2n+1} en fonction de n .
- 3) On pose $v_n = u_n + 1 - 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Prouver que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme
 - b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n .
- 4) Calculer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$ puis en déduire $T_n = \sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 5u_n - 2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

- 1) Calculer u_1 et u_2
- 2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n > \frac{1}{2}$
- 3) a) Etudier la monotonie de la suite (u_n)
 - b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n \geq 1$
- 4) Soit (v_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}), v_n = \frac{2}{2u_n - 1}$
 - a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme
 - b) Déterminer v_n en fonction de n
 - c) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = \frac{2 + v_n}{2v_n}$ et en déduire u_n en fonction de n

Exercice 4

On considère la suite numérique (a_n) définie par : $a_0 = \frac{3}{2}$ et $a_{n+1} = \frac{2}{3 - a_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$



- 1) a) Calculer a_1 et a_2
 - b) La suite (a_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
- 2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 1 < a_n < 2$
- 3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n - 1)(a_n - 2)}{3 - a_n}$
 - b) En déduire la monotonie de la suite (a_n)
- 4) Soit (b_n) la suite définie par : $b_n = \frac{a_n - 1}{a_n - 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 - a) Montrer que la suite (b_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme
 - b) Déterminer b_n en fonction de n
 - c) en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}), a_n = 2 \times \frac{1 + 2^{n-1}}{1 + 2^n}$

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{4} \leq u_n \leq 1$
 - b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante
- 2) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = \frac{1}{n} u_n$
 - a) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont il faut donner sa raison et son premier terme
 - b) Exprimer v_n en fonction de n
 - c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n = \frac{n}{2^n}$
- 3) a) En remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $(n+1)^2 = n^2 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$. Montrer, en raisonnant par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 4$, on a : $n^2 \geq 2^n$

Exercice 6

On considère (x_n) la suite numérique définie par : $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \frac{5x_n + 3}{x_n + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

- 1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $x_{n+1} = 5 - \frac{12}{x_n + 3}$
 - b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq x_n < 3$
 - c) Etudier le sens de variation de la suite (x_n)
- 2) Soit (y_n) , la suite numérique définie par : $y_n = \frac{x_n - 3}{x_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$



-
- a) Montrer que la suite (y_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$
- b) Exprimer y_n puis x_n en fonction de
-

