

Exercice 1 : (5,5 points)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 4$ pour tout n de \mathbb{N} .

0,5

1) Calculer u_1 et u_2

1

2) Montrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} , $u_n < \frac{16}{3}$.

0,75

3) a) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{4}\left(u_n - \frac{16}{3}\right)$.

0,5

c) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.

0,25

4) Déduire de ce qui précède que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.5) On pose pour tout n de \mathbb{N} : $v_n = u_n - \frac{16}{3}$

0,75

a) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

0,75

b) Calculer v_0 et exprimer v_n en fonction de n .

0,5

c) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} ; $u_n = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{16}{3}$.

0,5

6) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.**Exercice 2 : (5,5 points)**

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - \ln x - x \ln x.$$

1

1) a) Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x)$

1

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

0,5

2) a) Vérifier que $g(e) = -e$

2

b) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$; $g(x) + x = (x+1)(1 - \ln x)$ puis résoudre l'équation

$$g(x) = -x.$$

1

3) Ci-dessous voici le tableau de variations de g

x	0	1	e	$+\infty$
$g'(x)$			-	
$g(x)$		1	$-e$	

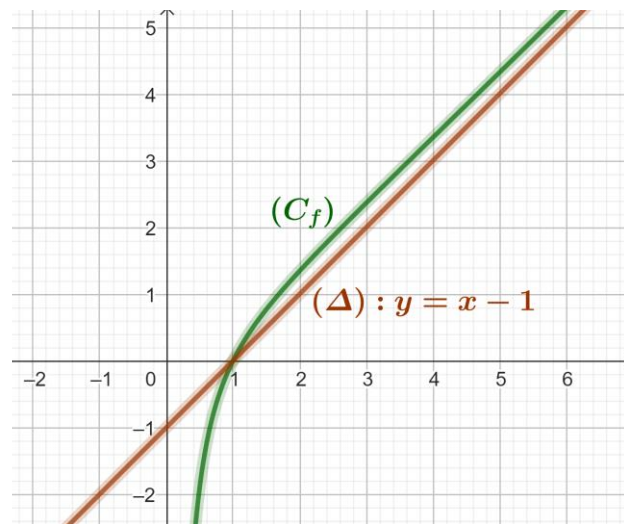
Donner à l'aide du tableau de variations de g , l'image de l'intervalle $[1, e]$ par g .

Exercice 3 : (4 points)

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous, (Δ) est la droite d'équation $y = x - 1$ et (C_f) est la courbe représentative de la fonction f de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$$

- 1) Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ et donner une interprétation géométrique du résultat.
- 1,5) Justifier par le calcul que la droite (Δ) est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.
- 3) Ci-dessous (C_f) est la représentation graphique de f .
- 0,5) a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
- 1) b) Donner graphiquement le signe $f(x) - (x - 1)$ sur $]0, 1]$ puis sur $[1, +\infty[$.



Exercice 4 : (3 points)

On considère la fonction numérique h de la variable réelle x définie sur \mathbb{R}^* par :

$$h(x) = \left(\frac{1}{x} + 2 \right) e^x$$

- 2) 1) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x)$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} h(x)$
- 1) 2) Montrer que pour tout x de \mathbb{R}^* ; $h'(x) = (2x^2 + x - 1) \frac{e^x}{x^2}$.

Exercice 5 : (3 points)

2 1) Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système :
$$\begin{cases} u + 2v = 7 \\ 4u - v = 1 \end{cases}$$

1 2) En déduire que le couple $(0, \ln 3)$ est la solution du système
$$\begin{cases} e^x + 2e^y = 7 \\ 4e^x - e^y = 1 \end{cases}$$

FIN

HTTPS://WWW.DIMAMATH.COM
Smail Eljaâfari