Exercice 1 (SR2004)

Un sac contient 10 boules blanches et 10 boules rouges indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule du sac, si elle est rouge on la remet dans le sac et si elle est blanche on met 3 boules rouges dans le sac puis on tire une boule du sac.

1) Calculer la probabilité de l'événement « les deux boules tirées sont rouges »

2) Calculer la probabilité de l'événement « les deux boules tirées sont blanches »

3) Calculer la probabilité de l'événement « les deux boules tirées sont de couleurs différentes »

4) Calculer la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche, sachant que la deuxième boules tirée est blanche.

Exercice 2 (SD2005)

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 20$.

Un sac contient 10 boules blanches et $(n-10)$ boules noires indiscernables au toucher.

On tire une boule du sac, on note sa couleur puis on la remet dans le sac. On répète cette expérience n fois.

On note p_k la probabilité de tirer k boules blanches où $(0 \leq k \leq n)$.

1) Calculer p_k en fonction de n et k.

2) On pose : $u_k = \dfrac{p_{k+1}}{p_k}$ où $k \in \{0,1,2,\dots,(n-1)\}$.

a) Montrer que : $u_k = \dfrac{(n-k)}{(k+1)} \times \dfrac{10}{(n-10)}$.

b) Montrer que : $0 \leq k \leq 9 \Leftrightarrow u_k \geq 1$ et $10 \leq k \leq n-1 \Leftrightarrow u_k \leq 1$.

c) Déduire la plus grande valeur M de p_k quand k varie dans $\{0,1,2,\dots,n\}$.

Et montrer que : $\mathrm{M} = \dfrac{n!}{n^n} \times \dfrac{10^{10}}{10!} \times \dfrac{(n-10)^{n-10}}{(n-10)!}$

Exercice 3 (SR2006)

On distribue d'une façon aléatoire quatre boules indiscernables au toucher et numérotées 1, 2, 3 et 4 ; sur six personnes A, B, C, D, E et F. Chaque personne peut obtenir 0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4 boules.

1) Quel est le nombre de possibilités de distribuer les quatre boules sur les six personnes ?

2) Calculer la probabilité que la personne A obtienne au moins une boule.

3) Calculer la probabilité de l'événement « la somme des numéros des boules obtenues par les personnes B et C est égal au nombre de boules obtenues par la personne A »

Exercice 4 (SR2007)

Soit n un entier naturel impair tel que $n \geq 3$.

On a n boites numérotées de 1 à n. La boite qui porte le numéro k tel que $1 \leq k \leq n$, contient k boules blanches et $(n-k)$ boules noires.

On choisit au hasard une boite parmi les n boites et on y tire une seule boule.

1) Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche.

2) Calculer la probabilité que le tirage s'effectue dans une boite portant un numéro impair.

3) Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche sachant que le tirage s'est effectué dans une boite portant un numéro impair.

Exercice 5 (SR2009)

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 4$.

On a trois urnes U_1, U_2 et U_3 :

- L'urne U_1 contient une seule boule rouge et $(n-1)$ boules noires.
- L'urne U_2 contient deux boules rouges et $(n-2)$ boules noires.
- L'urne U_3 contient trois boules rouges et $(n-3)$ boules noires.

On considère l'expérience aléatoire suivante :

On choisit au hasard une boite parmi les trois boites, puis on tire simultanément deux boules de l'urne choisie.

Soit X la variable aléatoire qui est égal au nombre de boules rouges tirées.

1) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

2) a) Montrer que la probabilité de l'événement $(X=2)$ est égale à : $\dfrac{8}{3n(n-1)}$

b) Montrer que la probabilité de l'événement $(X=1)$ est égale à : $\dfrac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$

c) Déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X

3) Sachant qu'on a obtenu deux boules rouges, quelle est la probabilité que le tirage s'est effectué de l'urne U_3 ?

Exercice 6

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes : U_1, U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k est un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Dans l'urne U_1 on a trois boules noires, dans l'urne U_2 on a deux boules noires et dans l'urne U_3 on a une boule noire. Toutes les autres boules dans les urnes sont blanches. Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie du jeu se déroule de la façon suivante : Le joueur lance le dé

- S'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule de l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans U_1.
- S'il obtient un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U_2, note sa couleur et la remet dans U_2.
- S'il obtient un numéro différend de 1 et qui n'est pas un multiple de 3, il prend au hasard une boule dans U_3, note sa couleur et la remet dans U_3.

On désigne par A, B, C et N les événements suivants :

A : « Le dé amène le numéro 1 »

B : « Le dé amène un multiple de 3 »

C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni 1 ni un multiple de 3 »

N : « La boule tirée est noire »

1) Le joueur joue une partie.

a) Montrer que la probabilité que la boule tirée est noire est égale à $\frac{5}{3k}$.

b) Calculer la probabilité que le dé ait amené le numéro 1 sachant que la boule tirée est noire.

c) Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\frac{1}{2}$

d) Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\frac{1}{30}$.

2) Dans cette question, k est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire, en jouant une partie, soit égale à $\frac{1}{30}$. Le joueur fait 20 parties indépendantes les unes des autres.

Donner la probabilité, sous la forme exacte, qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.