الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2023
-الموضوع-

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵓⵏⵏⵓⵏⵜ

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

RS24F

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS

المادة	الرياضيـــــــــــــــــات	مدة الإنجاز	4 ساعات
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	المعامل	9

CONSIGNES :

- ✓ La durée de l’épreuve est de 4 heures
- ✓ L’épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux
- ✓ Les exercices peuvent être traités selon l’ordre choisi par le candidat

Exercice 1	L’analyse	10 points
Exercice 2	Les nombres complexes	3,5 points
Exercice 3	Les structures algébriques	3,5 points
Exercice 4	L’arithmétique	3 points

L’usage de la calculatrice n’est pas autorisé
L’usage de la couleur rouge n’est pas autorisé

Exercice 1 : (10 points)

Partie I :

Pour tout entier naturel **non nul** n, on considère la fonction f_n définie sur

$I=[0,+\infty[$ par : $f_n(0)=0$ et $(\forall x\in]0,+\infty[);\ f_n(x)=\sqrt{x}(\ln x)^n$

et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

0,5 1) a) Vérifier que : $(\forall x\in]0,+\infty[);\ \sqrt{x}(\ln x)^n=(2n)^n\left(x^{\frac{1}{2n}}\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n$, en déduire

Que f_n est continue à droite en 0

0,25 b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

0,75 c) Vérifier que : $(\forall x\in]0,+\infty[);\ \dfrac{f_n(x)}{x}=(2n)^n\left(\dfrac{\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{2n}}}\right)^n$, en déduire

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu

0,5 d) Calculer, suivant la parité de n, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f_n(x)}{x}$ puis interpréter

graphiquement le résultat obtenu

0,75 2) a) Montrer que f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que :

$$(\forall x\in]0,+\infty[);\ f_n'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^{n-1}(2n+\ln x)$$

0,25 b) Vérifier que : $\forall n\geq 2,\ f_n'(x)=0$ si et seulement si $(x=1\ ou\ x=e^{-2n})$

1 c) Etudier, suivant la parité de n, le sens de variation de f_n et donner son

tableau de variations

0,25 d) Montrer que si n est impair et $n\geq 3$ alors le point d'abscisse 1 est un

point d'inflexion de (C_n).

Partie II :

1) Soit $\beta \in]1,e[$ un réel fixé. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n = f_n(\beta)$

0,25 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $0 < u_n < \sqrt{e}$

0,25 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante

0,25 c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

0,5 2) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique réel $x_n \in]1,e[$ tel que : $f_n(x_n) = 1$

0,75 b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est croissante, en déduire qu'elle est convergente

3) On pose : $L = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

0,5 a) Montrer que : $1 < L < e$

0,25 b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln x_n)^n = \dfrac{1}{\sqrt{L}}$

0,25 c) Montrer que si $L < e$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(\ln x_n) = -\infty$

0,25 d) En déduire la valeur de L

Partie III :

On pose pour tout $x \in I$, $F(x) = \int_x^1 (f_1(t))^2\,dt$

0,25 1) a) Montrer que la fonction F est continue sur I

1 b) En utilisant une double intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x \in]0,+\infty[);\ F(x) = -\frac{x^2}{2}\ln^2(x) + \frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{1}{4}(1-x^2)$$

0,5 2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$

0,25 b) En déduire la valeur de $F(0)$

0,5 c) Calculer, en cm^3, le volume du solide engendré par la rotation d'un tour complet autour de l'axe des abscisses de la portion de la courbe (C_1) relative à l'intervalle $[0,1]$. (on prendra $\|\vec{i}\| = 1cm$)

Exercice 2 :(3 ;5 points)

Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment.

Partie I :

On considère dans $\mathbb{R}^2$, le système suivant : $(S): \begin{cases} \sqrt{x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=\dfrac{12}{5} \\ \sqrt{y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=\dfrac{4}{5} \end{cases}$

1) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, une solution du système (S). On pose : $z=\sqrt{x}+i\sqrt{y}$

0,25 a) Montrer que : $z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{12}{5}+\dfrac{4}{5}i$

0,75 b) Montrer que : $z^2-\left(\dfrac{12}{5}+\dfrac{4}{5}i\right)z+1=0$, en déduire les valeurs possibles de z. (on remarque que : $\dfrac{28}{25}+\dfrac{96}{25}i=\left(\dfrac{2}{5}(4+3i)\right)^2$

0,25 c) En déduire les valeurs du couple (x,y)

0,5 2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, le système (S)

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soit (U) le cercle de centre O et de rayon 1 et $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points Du cercle (U) deux à deux distincts.

0,25 1) Montrer que : $(\forall z\in\mathbb{C});\ |z|=1 \Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{1}{z}$

0,5 2) a) La droite passant par A et parallèle à (BC) coupe le cercle (U) au point $P(p)$. Montrer que : $p=\dfrac{bc}{a}$

0,5 b) La droite passant par A et perpendiculaire à (BC) coupe le cercle (U) au point $Q(q)$. Montrer que : $q=-p$

0,5 c) La droite passant par C et parallèle à (AB) coupe le cercle (U) au point $R(r)$. Montrer que les deux droites (PR) et (OB) sont perpendiculaires.

Exercice 3 :(3 points)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire et non commutatif

d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Soit $E=\left\{M(a,b,c)=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&-c\\0&c&b\end{pmatrix}/(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$

0,25 1) Montrer que E est un sous-groupe de $(M_3(\mathbb{R}),+)$

2) On munit l'ensemble $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$\forall((x,z),(x',z'))\in(\mathbb{R}\times\mathbb{C})^2;\ (x,z)*(x',z')=(x+x',z+z')$ et on considère

L'application φ définie de E vers $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ par :

$$\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \varphi(M(a,b,c))=(a,b+ci)$$

0,5 a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(E,+)$ vers $(\mathbb{R}\times\mathbb{C},*)$ et que $\varphi(E)=\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

0,25 b) En déduire que $(\mathbb{R}\times\mathbb{C},*)$ est un groupe commutatif

3) On munit $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ de la loi de composition interne T définie par :

$$\forall((x,z),(x',z'))\in(\mathbb{R}\times\mathbb{C})^2;\ (x,z)T(x',z')=(x\mathrm{Re}(z')+x'\mathrm{Re}(z),zz')$$

($\mathrm{Re}(z)$ désigne la partie réelle du nombre complexe z)

0,25 a) Montrer que T est commutative

0,25 b) Vérifier que $(0,1)$ est l'élément neutre de T dans $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

0,5 c) Vérifier que $\forall x\in\mathbb{R},\ (1,i)T(x,-i)=(0,1)$; en déduire que T est non associative dans $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

4) Soit $G=\{(\mathrm{Im}(z),z)/z\in\mathbb{C}\}$ où $\mathrm{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire de z.

0,25 a) Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}\times\mathbb{C},*)$

(on remarque que $(-\mathrm{Im}(z),-z)$ est le symétrique de $(\mathrm{Im}(z),z)$ pour $*$)

0,25 b) Soit ψ l'application définie de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ par :

$\forall z\in\mathbb{C}^*,\ \psi(z)=(\mathrm{Im}(z),z)$

Montrer que ψ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(\mathbb{R}\times\mathbb{C},T)$

0,5	c) En déduire que $\left(G-\{(0,0)\},T\right)$ est un groupe commutatif
0,5	5) Montrer que $(G,*,T)$ est un corps commutatif
	Exercice 4 :(3 point)
	Soit p un nombre premier impair. On pose : $S=1+p+p^2+p^3+...+p^{p-1}$
	Soit q un nombre premier qui divise S.
0,5	1) a) Montrer que p et q sont premiers entre eux
0,25	b) En déduire que : $p^{q-1}\equiv 1[q]$
0,5	c) Vérifier que : $p^p-1=(p-1)S$, en déduire que : $p^p\equiv 1[q]$
	2) On suppose que p et $q-1$ sont premiers entre eux
0,75	a) En utilisant le théorème de Bézout, montrer que : $p\equiv 1[q]$
0,25	b) En déduire que : $S\equiv 1[q]$
0,75	3) Montrer que : $q\equiv 1[p]$

FIN