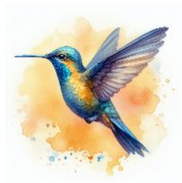
Exercice 1

Dans chacun des cas suivants ; montrer que la fonction f est une bijection de l'intervalle donné I vers un intervalle J que l'on déterminera puis donner l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$; $I =]-\infty; 2]$
2) $f(x) = \sqrt{1-x} + 2$; $I =]-\infty; 1]$
3) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$; $I =]0; +\infty[$
4) $f(x) = \dfrac{2x+1}{2-x}$; $I =]2; +\infty[$



Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x - 4\sqrt{x} + 3$

1) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$
2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation
3) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I = [4; +\infty[$
   a) Montrer que g est une bijection de I vers un intervalle J à déterminer
   b) Déterminer $g^{-1}(x)$ *pour tout* $x \in J$

Exercice 3

Soit u une fonction continue sur l'intervalle $[0;1]$ telle que $u(0) = u(1)$. On considère la fonction f définie sur $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$ par :

$f(x) = u\left(x + \dfrac{1}{2}\right) - u(x)$.

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.

Exercice 4

Soit f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle $[a,b]$ où a et b sont des réels donnés telles que :

$f(a) = g(b)$ *et* $f(b) = g(a)$.

Montrer que : $(\exists c \in [a;b]); f(c) = g(c)$

Exercice 5

Soit a et b deux réels tels que $a \times b > 0$ et $a < b$; et soit f une fonction définie et continue sur $[a;b]$ telle que $f([a;b]) \subset [a;b]$.

Montrer que : $(\exists c \in [a;b]); c \times f(c) = a \times b$

Exercice 6

1/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

a/ Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $1 < \alpha < 2$.

b/ En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

c/ Donner un encadrement de α à $0{,}125$ près.

2/ Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$

a/ Déterminer les limites de f en -1 *et en* $+\infty$.

b/ Etudier les variations de f sur $]-1; +\infty[$.

c/ Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{2(1-\alpha)}{3(1+\alpha^2)}$.

Exercice7

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{ax^2 - (1+a)x + 1}{b(x^2+1)} ; |x| \neq 1 \\ g(1) = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Telle que $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\frac{1}{2}$.

Déterminer les réels a et b pour que la fonction g soit continue en 1

Exercice 8

1/ Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[-1;1]$

Montrer que : $(\exists c\in]-1;1[);f(c)=\frac{2c}{c^2-1}$.

2/ Soit h une fonction définie et continue sur l'intervalle $\left[\frac{1}{a};a\right]$ où $a>1$.

Démontrer que : $\left(\exists c\in \left]\frac{1}{a};a\right[\right);h(c)=c\times h\left(\frac{1}{c}\right)$.

Exercice 9

Soit $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^{n+1}-2x^n+1$

1/ a/ Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0;\frac{2n}{n+1}\right]$

b/ En déduire que $f\left(\frac{2n}{n+1}\right)<0$.

2/ Montrer que : $\left(\exists\alpha\in\left]\frac{2n}{n+1};2\right[\right):f(\alpha)=0$.

3/ Vérifier que : $\alpha^n=\frac{1}{2-\alpha}$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ par :. $f(x)=\sqrt{1-4x^2}$

1/ Montrer que la fonction f réalise une bijection de $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ vers un intervalle J que l'on déterminera

2/ Soit f^{-1} sa fonction réciproque. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

Exercice 11

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

1/ Montrer que la fonction h réalise une bijection de l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ vers un intervalle J à déterminer.

2/ Donner l'expression de $h^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

3/ Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$,construire les courbes (C_h) et $(C_{h^{-1}})$.

Exercice 12

Démontrer que la fonction réciproque f^{-1} d'une fonction impaire bijective f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, est impaire.

Que peut-on dire pour une fonction paire ?

Exercice 13

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et continue en 0 telle que $(\forall x\in\mathbb{R});f(x)=f(2x)$.

Montrer que f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=1-x+\sqrt{x^2+3}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1/ a/ Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

b/ Etudier les branches infinies de la courbe (C_f)

2/ a/ Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});f'(x)=\frac{x-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}}$

b/ Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation

3/ a/ Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on précisera.

b/ Calculer $f(1)$ et en déduire $f^{-1}(2)$

c/ Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

4/ Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α, et que $1 < \alpha < 2$

5/ Construire dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ les courbes (C_f) *et* $(C_{f^{-1}})$.

https://www.dimamath.com

MATHÉMATIQUES
POUR TOUS