Exercice 1

Soit f une fonction définie et continue sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[0,1]$.

Montrer que : $(\exists c \in [0,1]) : f(c) + f(1-c) = 2c$

Exercice 2

Soit f une fonction définie et continue sur $[0,1]$ telle que : $f(0) = f(1) = \dfrac{1}{2}$

Montrer que : $(\exists c \in]0,1[) : f(c) = \dfrac{1-c}{1+c}$

Exercice 3

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que $(\exists a \in \mathbb{R}) : f \circ f(a) = a$.

Montrer que : $(\exists c \in \mathbb{R}) : f(c) = c$

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

$a)\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x \arctan \sqrt{x} - \dfrac{\pi}{2} x \right)$; $b)\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} \arctan\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1+x} \right)$

$c)\ \lim\limits_{x \to -\infty} 2x + 1 + \sqrt[3]{x - 8x^3}$; $d)\ \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \right) - \pi}{x-1}$

Exercice 5

1) Montrer que : $2\arctan 2 + \arctan\left(\dfrac{4}{3} \right) = \pi$

2) Montrer que : $(\forall x > 1)\ \arctan\left(\dfrac{2x}{1-x^2} \right) = 2\arctan x$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $arx\tan x + \arctan(2x) = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = \left[0, \dfrac{\pi}{2} \right[$ par : $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\tan x} \right)$

1) Montrer que f réalise une bijection de I vers I.

2) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de I.

3) Résoudre dans I l'équation $f(x) = x$ puis l'inéquation $f(x) > x$

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 1 + \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} & ;\ x \geq 2 \\ f(x) = \dfrac{2}{\pi} \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{2-x}} \right) & ;\ x < 2 \end{cases}$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) Etudier la continuité de la fonction f au point 2

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty, -2[$.

Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer, puis calculer $g^{-1}(x)$ pour Tout x de J.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\arctan\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right); \ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de la fonction f au point 0.

2) Etudier la parité et la monotonie de la fonction f.

3) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser, puis déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ et en déduire une expression simple de $f(x)$.

Exercice 9

Soit n un entier naturel non nul tel que $n\geq 2$.

On considère la fonction f_n définie par : $f_n(x)=\sqrt[n]{(\arctan x)^n+\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^n}$.

1) Déterminer D_n l'ensemble de définition de f_n.

2) Calculer les limites de f_n aux bornes de D_n.

3) On suppose que n est impair.

Montrer que f_n est bijective de D_n sur un intervalle J à déterminer, puis déterminer l'expression de f_n^{-1}.

Exercice 10

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(1)=f(0)$, et soit n un entier naturel tel que $n\geq 2$.

On considère la fonction f_n définie par : $f_n(x)=f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-f(x)$

1) Calculer la somme $S=\sum\limits_{k=0}^{n-1} f_n\left(\dfrac{k}{n}\right)$, en fonction de n.

2) Démontrer que : $(\exists x_0\in]0,1[);\ f(x_0)=f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 11

Soient α et β deux réels strictement positifs et soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0)\neq f(1)$.

Montrer que : $(\exists c\in[0,1]):\ \alpha f(0)+\beta f(1)=(\alpha+\beta) f(c)$

Exercice 12

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\operatorname{Arctan}\left(\sqrt[3]{x}\right)-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

1) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$.

2) Montrer que $1<\alpha<3\sqrt{3}$, puis déduire que $\dfrac{\pi}{6}<\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}\right)<\dfrac{\pi}{4}$

Exercice 12

1) Montrer que : $\forall(a,b)\in]-1,1[\times]-1,1[\ ;\ \arctan(a)+\arctan(b)=\arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\arctan\left(\dfrac{1}{4}\right)+\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)+\arctan\left(\dfrac{1}{6}\right)+\arctan(x)=\dfrac{\pi}{4}$

3) Calculer les limites : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\arctan\left(\sqrt{x}\right) - \arctan(x)}{x-1}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)^{\frac{1}{3}} - (x+1)^{\frac{1}{4}}$

Exercice 13

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$

1) a) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$

b) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

2) a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à déterminer.

b) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de J

3) Montrer que l'équation $f^{-1}(x) = f(x)$ admet une unique solution α telle que $0 < \alpha < 1$

4) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(-x) = \dfrac{\pi}{2} - f(x)$

b) Donner une interprétation graphique à ce résultat.