Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{x-1}{x-3+\sqrt{2x^2+x+1}}$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f.
2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3) a) Montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité g en 1.
   b) La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en (-8) ?
4) Montrer que g est continue sur les intervalles $]-\infty,-8[$ et sur $]-8,+\infty[$.

Exercice 2

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=4x^3-12x+1$

1) Dresser le tableau de variation de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-1,1[$.
3) Montrer que l'équation $x^4-6x^2+x+1=0$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $]-1,1[$.

Exercice 3

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=E(x)+(x-E(x))^2$

1) Etudier la continuité de la fonction g en $x_0=1$
2) Etudier la continuité de la fonction g en $x_1=\dfrac{3}{2}$
3) Etudier la continuité de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}-1}$.

1) a) Déterminer D_f le domaine de définition de f.
   b) Etudier les variations de la fonction f sur D_f.
2) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I=[4,+\infty[$.
   b) Montrer que g est une bijection de I vers un intervalle J à déterminer.
   c) Déterminer l'expression de sa bijection réciproque g^{-1}.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\mathrm{Arctan}(3x)+2x-1$

1) Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
2) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J à déterminer.
3) a) Montrer que l'équation $f^{-1}(x)=x$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ puis que $0<\alpha<\dfrac{1}{3}$.
   b) Vérifier que : $\alpha=1-\mathrm{Arctan}(3\alpha)$
4) a) Résoudre l'inéquation $f^{-1}(x)<x$ et interpréter le résultat graphiquement.
   b) Déduire l'ensemble de solutions de l'inéquation $x\geq f(x)$

Exercice 6

On considère la fonction g définie par : $g(x)=\dfrac{\sqrt{\sin x+1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$

1) a) Montrer que $D_g=\mathbb{R}^*$

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to0^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ et interpréter géométriquement les résultats obtenus

2) a) Montrer que $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x^2}=0$

   b) Déduire $\lim\limits_{|x|\to+\infty} g(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) Prouver que la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x)=x\,g(x)$ est prolongeable par continuité en 0

4) Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation $g(x)=1$

5) Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right):\ \dfrac{|x|-1}{\sqrt{x^2+1}-1}\le g(x)\le\dfrac{\sqrt{x^2+2}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2},+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x\tan x+\cos x-1}{x^2} & ;\ si\ -\dfrac{\pi}{2}<x<0 \\ f(0)=\dfrac{3}{8} & \\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+16}-6}{x} & ;\ si\ x>0 \end{cases}$$

1) a) Montrer que la fonction f est continue en 0

   b) Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2},+\infty\right[$.

   c) Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{4}$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0,20]$

   (on prend $f(20)\simeq0,245$)

2) a) Montrer que : $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right):\ f(x)>0$

   b) $\left(\exists(a,b)\in\mathbb{R}_+^{*2}\right):\ a\,x+6\le\sqrt{x+4}+\sqrt{x+16}\le b\,x+6$

Exercice 8

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $]0,\pi[$, par :

$$f_n(x)=\frac{\sin^{2n}(x)}{(1-\cos x)(1-\cos^2 x)\times\ldots\times(1-\cos^n x)}$$

1) a) Montrer que : $\left(\forall p\in\mathbb{N}^*\right):\ \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos^p x}=\dfrac{2}{p}$

   b) En déduire que $\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x)=\dfrac{2^n}{n!}$

2) a) Montrer que si p est impair, alors $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos^p x} = 0$

b) Montrer que si p est pair, alors $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos^p x} = \dfrac{2}{p}$

c) En déduire que $\lim\limits_{x\to\pi} f_n(x) = 0$

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2} + \arctan\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right) & ; si\ x < 1 \\ f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} & ; si\ x \geq 1 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation
3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = \left]-\infty, 0\right[$.
   Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera, puis déterminer l'expression de sa fonction réciproque g^{-1}.

https://www.dimamath.com

MATHÉMATIQUES POUR TOUS