



Exercice 1

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes en a , puis donner son nombre dérivé en a lorsqu'il existe et interpréter le résultat graphiquement :

$$1/ f_1(x) = x^3 - 2x + 4 ; a = -1.$$

$$2/ f_2(x) = \frac{\sqrt[3]{x+4} - 1}{\sqrt{x+1}} ; a = 4.$$

$$3/ f_3(x) = \frac{x^2 + 2}{x + 2} ; a = 0$$

$$4/ f_4(x) = (x-1)|x^2 - 1| ; a = 1 .$$

$$5/ f_5(x) = 1 - x^2 + \sqrt{x+1} ; a = 0$$

$$6/ f_6(x) = \sin^2(x) \times E\left(\frac{x}{2}\right) ; a = 0$$

$$7/ \begin{cases} f_7(x) = \frac{1 - \cos x}{x + \sin x} ; x > 0 \\ f_7(0) = 0 \\ f_7(x) = \frac{x^2}{2} \times E\left(\frac{1}{2x}\right) ; x < 0 \end{cases} ; a = 0$$

$$8/ f_8(x) = \text{Arc tan}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right) ; a = 1$$

$$9/ \begin{cases} f_9(x) = \text{Arc tan}\left(\frac{x}{2\sqrt{x-8}}\right) ; x > 8 \\ f_9(8) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Exercice 2

Etudier la dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle I, dans les cas suivants :

$$1/ f(x) = \sqrt{x^2 - 1} ; I =]1; +\infty[$$

$$2/ f(x) = \sin\left(\frac{x+1}{2x-1}\right) ; I = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$$

$$3/ f(x) = \text{Arc tan}\left(\frac{2x+3}{x-2}\right) ; I =]2; +\infty[$$

$$4/ \begin{cases} f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x} ; x \geq 2 \\ f(x) = x + \text{Arc tan}\sqrt{2-x} ; x < 2 \end{cases} ; I = \mathbb{R}$$

Exercice 3

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes en a et interpréter le résultat graphiquement.

$$1/ f_1(x) = \frac{|x^2 - x| + 2}{|x-1| + 1} ; a = 1.$$

$$2/ f_2(x) = (x-2)E(x) ; a = 2.$$

3/

$$f_3(x) = \begin{cases} f_3(x) = \text{Arc tan}\left(\frac{x}{2\sqrt{x-8}}\right) ; x > 8 \\ f_3(8) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad a = 8$$

$$4/ \begin{cases} f_4(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arc tan}\left(\frac{1}{|x+1|}\right) ; x \neq -1 \\ f_4(-1) = 0 \end{cases} \quad a = -1 .$$

$$5/ f_5(x) = (2x-3)\sqrt{x+1} ; a = 1$$

$$6/ \begin{cases} f_6(x) = (x^2 - 4x + 4)\sin\left(\frac{1}{x-2}\right) ; x > 2 \\ f_6(x) = (\sqrt{x} - \sqrt{2})\sqrt{x-2} ; x \geq 2 \end{cases} \quad a = 2$$

Exercice 4

Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes puis donner l'expression de f'(x) en fonction de x:

$$1/ g_1(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 3.$$

$$2/ g_4(x) = \frac{2-x^2}{2x-3x^2-1}$$

$$3/ g_2(x) = 3\sqrt{x} - 2x^2 + x - 4 .$$

$$4/ g_5(x) = \sqrt{5x^2 + x + 2}$$

$$5/ g_3(x) = (2x^2 - 3x + 7)^5 .$$

$$6/ g_8(x) = x(1-|x|)$$

$$7/ g_6(x) = (1 - \cos x)\sin(2x).$$

$$8/ g_7(x) = (3x-5)\sqrt{2-x}$$

$$9/ g_9(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2 - x}.$$

$$10/ g_{11}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{1-x}}.$$

$$11/ g_{15} = \sin(x + 2\sqrt{x})$$

Exercice 5



On considère la fonction f définie sur l'intervalle

$I = [1; +\infty[$ par : $f(x) = (x-1)(2-\sqrt{x-1})^2$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2/ a/ Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_0 = 1$ puis interpréter ce résultat graphiquement.

b/ Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout $x \in I$.

c/ Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3/ a/ Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in]1; +\infty[$.

b/ Etudier la concavité de la courbe (C_f) et donner les coordonnées de son point d'inflexion

4/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $K = [5; +\infty[$

a/ Montrer que g est une bijection de K vers un intervalle J que l'on déterminera. On notera g^{-1} sa fonction réciproque.

b/ Calculer $g^{-1}(9)$ et $(g^{-1})'(9)$.

c/ Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Exercice 6

On considère la fonction h définie sur \mathbb{R} par :

$\begin{cases} h(x) = \text{Arctan} \sqrt{x+1}; x \geq -1 \\ h(x) = x+1 - \sqrt{x^2+x}; x < -1 \end{cases}$ et soit (C_h) sa

courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a/ Montrer que h est continue sur \mathbb{R}

b/ Etudier la dérivabilité de h en $x_0 = -1$ et interpréter le résultat graphiquement

2/ a/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$

b/ Etudier les branches infinies de la courbe (C_h)

3/ a/ Calculer $h'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$

b/ Etudier les variations de la fonction

h et dresser son tableau de variation

4/ a/ Déterminer l'équation réduite de la tangente au point (C_h) à la courbe (T) d'abscisse 0

b/ Construire la courbe (C_h)

5/ Soit g la restriction de h à l'intervalle

$I =]-\infty; -1[$.

a/ Montrer que g est une bijection de l'intervalle I vers un intervalle J à déterminer.

b/ Tracer dans le même repère la courbe $(C_{g^{-1}})$

de la fonction réciproque de $g : g^{-1}$

c/ Donner l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$f(x) = (x-1)(x-3)(x-4)(x-5)$

Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet exactement 3 solutions dans \mathbb{R} .

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par :

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

1/ Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}^+ , et que :

$(\forall x \in \mathbb{R}^+); |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

2/ En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); 1 - \frac{x}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 1 + \frac{x}{2}$

Exercice 9

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]-1; 1[$

par : $g(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1/ a/ Calculer les limites de g aux bornes de $]-1; 1[$



<p>b/ Montrer que :</p> $(\forall x \in]-1;1[); g'(x) = -\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ <p>c/ Dresser le tableau de variation de g</p> <p>2/ a/ Montrer que la fonction g réalise une bijection de $]-1;1[$ vers un intervalle J à déterminer</p> <p>b/ Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$</p>	<p>3/ a/ Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α dans $]-1;1[$, et que $\alpha \in]0; \frac{1}{2}[$</p> <p>b/ Montrer que : $(\forall x \in [0; \frac{1}{2}]); g'(x) \leq \frac{8}{5}$</p> <p>c/ En déduire que : $(\forall x \in [0; \frac{1}{2}]); g(x) - \alpha \leq \frac{8}{5} x - \alpha$</p>
---	--

[HTTPS://WWW.DIMAMATH.COM](https://www.dimamath.com)

Smail Eljaâfari

[WWW.DIMAMATH.COM](https://www.dimamath.com)