Exercice 1

Calculer les expressions suivantes : $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$; $\frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$; $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$

Exercice 2

Montrer que : $\forall z\in\mathbb{C},\left(|z|<\frac{1}{2}\Rightarrow\left|(1+i)z^3+iz\right|^2<\frac{3}{4}\right)$

Exercice 3

Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que : $(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$

Exercice 4

Donner les parties réelles et imaginaires et le conjugué des nombres complexes suivants :

$z_1=(3+2i)^2(1-i)^2$; $z_2=(2+5i)+(3+i)$; $z_3=(1+2i)\overline{(1+2i)}$; $z_4=(1-i)^3$

Exercice 5

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$z_1=\frac{1}{4+3i}$; $z_2=\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$; $z_3=\frac{1-2i}{3+i}$; $z_4=\frac{(3+5i)^2}{1-2i}$; $z_5=\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2+\frac{3+6i}{3-4i}$

Exercice 6

Simplifier les nombres complexes suivants : $(1+i)^5$; $(1-i)^4$

Exercice 7

Soit $z=x+iy$ un nombre complexe tel que $(x;y)\in\mathbb{R}^2$. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$Z_1=\frac{\overline{z}}{z}$; $Z_2=\frac{iz}{\overline{z}}$

Exercice 8

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z\in\mathbb{C}$:

1) $z+2i=iz-1$

2) $(3+2i)(z-1)=i$

3) $(2-i)z+1=(3+2i)z-i$

2) $(4-2i)z^2=(1+5i)z$

5) $2z+i=\overline{z}+1$

6) $2z+\overline{z}=2+3i$

7) $2z+2i\overline{z}=2+6i$

Exercice 9

Résoudre les systèmes suivants d'inconnues les nombres complexes z_1 et z_2 :

1) $\begin{cases}2z_1-z_2=i\\-2z_1+3iz_2=-17\end{cases}$

2) $\begin{cases}3iz_1+iz_2=i+7\\iz_1+2z_2=11i\end{cases}$

Exercice 10

On appelle ensemble des entiers de Gauss noté $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble des nombres complexes qui s'écrivent sous la forme $a+ib$ tels que $(a;b)\in\mathbb{Z}^2$.

1) Soit z et z' des entiers de Gauss. Démontrer que $z-z'$ et zz' sont des entiers de Gauss.

2) Pour tout nombre complexe z, on note $N(z)=z\overline{z}$

a) Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z' : $N(z)\times N(z')=N(zz')$

b) Démontrer que, pour tout entier de Gauss z, $N(z)$ est un entier naturel.

c) Soit z un entier de Gauss non nul tel que $\frac{1}{z}$ est un entier de Gauss. Démontrer que $N(z)=1$

d) Déterminer l'ensemble des entiers de Gauss tels que $\frac{1}{z}$ est un entier de Gauss

Exercice 11

On donne les nombres complexes : $z_1=\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{8}-i\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$ et $z_2=\frac{1-i\sqrt{3}}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

1) Mettre les nombres complexes z_1 et z_2 sous forme algébrique

2) Déterminer le module puis un argument de z_1 , z_2 et $z_1\times z_2$

3) Déterminer le module puis un argument des nombres complexes $Z=\frac{z_1}{z_2}$ et $Z'=z_2^{10}$. Ecrire Z et Z' sous forme algébrique.

Exercice 12

On pose : $z_1=2\sqrt{2}(1+i)$; $z_2=\frac{3}{2}i\left(\sqrt{3}+i\right)$; $z_3=1-i\sqrt{3}$.

Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes : z_1 , z_2 , z_3 , $z_1\times z_2$ et $\frac{z_1\times z_2}{z_3}$

Exercice 13

Soit $z=re^{i\theta}$ avec $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$ et soit $n\in\mathbb{N}^*$.

Donner le module et un argument des nombres complexes suivants : z^2 ; $\overline{z}$; $\frac{1}{z}$; $-z$ et z^n

Exercice 14

On considère les nombres complexes $z_1=1+i\sqrt{3}$, $z_2 1+i$ et $z_3=\frac{z_1}{z_2}$.

1) Ecrire z_3 sous forme algébrique

2) Ecrire z_3 sous forme trigonométrique

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice 15

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants : $(2+2i)^6$; $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; $\frac{(1+i)^{2000}}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{1000}}$

Exercice 16

1) Donner l'écriture exponentielle du nombre complexe : $\frac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}$

2) Soit $a,\ b\in\left]0;\pi\right[$. Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$1+e^{ia}$; $1-e^{ia}$; $e^{1a}+e^{ib}$; $\frac{1+e^{ia}}{1+e^{ib}}$

Exercice 17

Soient z et z' deux nombres complexes tels que $|z|=1, |z'|=1$ et $zz'\neq -1$.

Démontrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel puis préciser son module

Exercice 18

1) Soit z un nombre complexe. Démontrer que : $1+|z|^2+2\mathcal{Re}(z)\geq 0$

2) Soient z et w deux nombres complexes. Démontrer que : $|z-w|^2\leq\left(1+|z|^2\right)\left(1+|w|^2\right)$

Exercice 19

Soit z un nombre complexe tel que $z\neq 1$. Démontrer que : $|z|=1 \Leftrightarrow \dfrac{1+z}{1-z}\in i\mathbb{R}$.

Exercice 20

Soit a un nombre complexe tel que $|a|<1$

1) Démontrer que, pour tout nombre complexe z tel que $1-\bar{a}z\neq 0$, $1-\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2=\dfrac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{|1-\bar{a}z|^2}$

2) Déterminer les nombres complexes z vérifiant $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|\leq 1$

Exercice 21

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $2z^2+6z+5=0$

2) $z^2-6z+13=0$

3) $z^2+z+1=0$

4) $\dfrac{3z+2}{z+1}=z+3$

Exercice 22

Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants : $z_1=3+4i$; $z_2=8-6i$

Exercice 23

Calculer les racines carrées de $Z=\sqrt{3}+i$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 24

1) Calculer les racines carrées du nombre complexe $1+2\sqrt{2}\,i$ sous forme algébrique.

2) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2+iz-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0$

Exercice 25

Résoudre les équations du second degré suivantes :

$(E_1): z^2-2iz-1+2i=0$

$(E_2): iz^2+(4i-3)z+i-5=0$

$(E_3): z^2-(7+i)z+12+3i=0$

Exercice 26

On considère l'équation $(E): z^3-(3+i)z^2-(2+5i)z+8+14i=0$

1) Vérifier que 2 est solution de l'équation (E).

2) Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que, pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$z^3-(3+i)z^2-(2+5i)z+8+14i=(z-2)\left(az^2+bz+c\right)$$

3) Déterminer les racines carrées de $16+30i$.

4) En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

Exercice 27

1) Déterminer les racines carrées des nombres complexes $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{j}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) En déduire les solutions de l'équation $z^4+z^2+1=0$

Exercice 28

Résoudre les équations suivantes :

1) $z^4=-1$ 2) $z^5=-i$ 3) $z^3=1+i\sqrt{3}$ 4) $z^6=\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$

5) $(z-1)^5=(z+1)^5$ 2) $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3+\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3=0$ 3) $(z+i)^n=(z-i)^n$

Exercice 29

Soit $n\geq 1$ et $\omega=e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1) Calculer le produit des racines n[ièmes] de l'unité

2) Soit $p\geq 0$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kp}$

3) En déduire que $\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\omega^k\right)^n=2n$.