Exercice 1

1) a) Montrer que :

$$\left(\forall x\in\left[0;\frac{2}{3}\right]\right),\ -x-\frac{x^2}{2}-x^3\le \ln(1-x)\le -x-\frac{x^2}{2}\text{, et}$$

$$\left(\forall x\in\left[0;\frac{2}{3}\right]\right),\ x-\frac{x^2}{2}\le \ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par :

$$f(x)=\frac{x}{x-1}-\ln(|x-1|)$$

a) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1;+\infty[$ et que $4<\alpha<5$.

d) Déduire le signe de $f(x)$ pour tout $x\neq 1$

Exercice 2

I - Soit f la fonction définie sur l'intervalle

$$I=\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[\text{ par : } \begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(2x+1)}{x}\ ;\ x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}.$$

On note par (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\,cm$.

1) Montrer que la fonction f est continue en 0.

2) Soit $a>0$. On considère la fonction h_a définie par :

$$h_a(x)=(\ln(1+2a)-2a)x^2-(\ln(1+2x)-2x)a^2.$$

a) Calculer $h_a(0)$ et $h_a(a)$, puis en déduire que $\exists! b\in]0;a[: \dfrac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}=\dfrac{-2}{1+2b}$.

b) Montrer que f est dérivable en zéro et que $f'(0)=-2$.

3) a) Montrer que

$$\forall x\in\left]-\frac{1}{2};0\right[\cup]0;+\infty[,\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2(1+2x)} \text{ où}$$

$$g(x)=2x-(1+2x)\ln(1+2x)$$

b) Montrer que $\forall x\in\left]-\dfrac{1}{2};0\right[\cup]0;+\infty[,\ g(x)<0$.

c) En déduire la monotonie de la fonction f sur l'intervalle I.

4) a) Calculer puis interpréter les limites :

$$\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x) \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

b) Montrer que : $\exists!\alpha\in]1;2[;\ f(\alpha)=1$.

c) Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

II – On pose : $\forall x\in I;\ \varphi(x)=\ln(1+2x)$ et $J=[1;\alpha]$.

1) a) Montrer que la fonction φ est dérivable sur l'intervalle I et que $\forall x\ge 1;\ 0<\varphi'(x)\le\dfrac{2}{3}$.

b) Vérifier que $\varphi(\alpha)=\alpha$ et $\varphi(J)\subseteq J$

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1}=\ln(1+2u_n);\ \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0=1 \end{cases}.$$

a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N};\ u_n\in J$

b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N};\ |u_n-\alpha|\le\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis donner sa limite.

https://www.dimamath.com

MATHÉMATIQUES POUR TOUS

Exercice 3

I - Soit f la fonction numérique définie sur $D=[0;1[\cup]1;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{\ln x}\,;\ x\in]0;1[\cup]1;+\infty[\\ f(0)=0 \end{cases}$$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\,cm$.

On considère l'équation $(E): e^x=x^n\,;\ n\in\mathbb{N}^*$.

1) Montrer que $\forall x\in]0;1[\cup]1;+\infty[\,;\ f(x)=n \Leftrightarrow e^x=x^n$

2) Montrer que la fonction f est dérivable à droite en zéro.

3) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to1^-} f(x)\,;\ \lim_{x\to1^+} f(x);\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\ et\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$

4) Etudier les variations de la fonction f sur $[0;1[\ et\ ]1;+\infty[$, puis dresser son tableau de variation

5) Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

6) Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

7) Montrer que l'équation (E) admet exactement deux solutions $a_n\ et\ b_n$ dans le cas où $n\geq3$ et que $1<a_n<e<b_n$.

II – 1) Montrer que $\forall n\geq3,\ b_n\geq n$ et en déduire la convergence de la suite $(b_n)_{n\geq3}$.

2) a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq3}$ est décroissante et qu'elle est convergente.

b) Montrer que $\forall n\geq3,\ \dfrac{1}{n}<\ln(a_n)<\dfrac{e}{n}$

c) Montrer que $\lim_{n\to+\infty}(a_n)^n=e$

Exercice 4

Partie 1

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{4\ln x}{x^2}-\dfrac{1}{2}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\,cm$.

1) Calculer les limites : $\lim_{x\to0^+} f(x)\ et\ \lim_{x\to+\infty} f(x)$, puis donner les branches infinies de la courbe (C_f).

2) a) Montrer que

$$\forall x\in]0;+\infty[,\ f'(x)=4\left(\frac{1-2\ln x}{x^3}\right).$$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions $\alpha\ et\ \beta$ dans $]0;+\infty[$ telles que : $1<\alpha<\sqrt{e}<\beta<3$.

4) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse $x_0=1$.

5) Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

Partie 2 :

1) Montrer que $\forall t\in[0;+\infty[,\ 1-t\leq\dfrac{1}{1+t}\leq1$

2) En déduire que

$$\forall a\in[0;+\infty[,\ a-\frac{a^2}{2}\leq\ln(1+a)\leq a.$$

Partie 3 :

Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq4$.

On considère la fonction numérique f_n définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f_n(x)=\dfrac{n\ln x}{x^2}-\dfrac{1}{2}$.

On désigne par (C_n) sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Etudier les variations de la fonction f_n.

2) Etudier la concavité de la courbe (C_n) et montrer qu'elle admet un point d'inflexion dont l'abscisse est $x_1=e^{\frac{5}{6}}$.

3) a) Comparer suivant les valeurs de x, les

quantités $f_n(x)$ *et* $f_{n+1}(x)$.

b) En déduire la position relative de la courbe (C_n) par rapport à la courbe (C_{n+1}).

4) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet exactement deux solutions u_n *et* v_n telles que $1<u_n<\sqrt{e}<v_n$.

5) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 4}$ est strictement décroissante.

6) a) Montrer que

$$\forall n\geq 4,\ \frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2}\leq \ln(u_n)\leq (u_n-1).$$

b) En déduire que

$$\forall n\geq 4,\ \frac{(u_n)^2}{2n}\leq (u_n-1)\leq \frac{(u_n)^2}{n(3-u_n)}$$

c) Montrer que $\forall n\geq 4,\ \frac{1}{2n}\leq (u_n-1)\leq \frac{e}{n}$.

d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 4}$ est convergente et calculer sa limite.

7) a) Montrer que $\forall n\geq 4,\ v_n>e^{5/6}$

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v \ =+\infty$