Table des matières

I – Opérations sur les égalités et les inégalités

II - Equation du premier degré

1 – Définition
2 – Résolution d'une équation du premier degré à une inconnue
3 – Equations se ramenant aux équations du premier degré
3 – 1 – Equation produit
3 – 2 – Egalité de deux carrés
3 – 3 – Equations rationnelles
4 – Problèmes utilisant les équations du premier degré

II – Inéquation du premier degré

1 – Définition
2 – Résolution d'une inéquation du premier degré
3 – Inéquations se ramenant aux inéquations du premier degré
4 – Problèmes

https://www.dimamath.com
MATHÉMATIQUES POUR TOUS

I – Opérations sur les égalités et sur les inégalités

Proposition 1

- ★ Une égalité ne change pas lorsqu'on on ajoute ou on retranche un même nombre à chaque côté de l'égalité. Autrement dit : Si a, b, x et y sont des nombres réels, alors :
  - ↳ $x = y$ équivaut à $x + a = y + a$
  - ↳ $x = y$ équivaut à $x - b = y - b$
- ★ Une égalité ne change pas lorsqu'on multiplie ou on divise ses deux termes de chaque côté de l'égalité par un même nombre non nul. Autrement dit : si x et y sont deux nombres réels et a et b sont des nombres réels non nuls, alors :
  - ↳ $x = y$ équivaut à $x \times a = y \times a$
  - ↳ $x = y$ équivaut à $x \div b = y \div b$

Exemples

- $2x + 3 = 7 \Leftrightarrow 2x + 3 - 3 = 7 - 3$
  $\Leftrightarrow 2x = 4$
  $\Leftrightarrow \dfrac{2x}{2} = \dfrac{4}{2}$
  $\Leftrightarrow x = 2$
- $\dfrac{3x-5}{4} = 2 \Leftrightarrow 3x - 5 = 4 \times 2$
  $\Leftrightarrow 3x - 5 = 8$
  $\Leftrightarrow 3x - 5 + 5 = 8 + 5$
  $\Leftrightarrow 3x = 13$
  $\Leftrightarrow \dfrac{3x}{3} = \dfrac{13}{3}$
  $\Leftrightarrow x = \dfrac{13}{3}$

Proposition 2

- ★ Une inégalité ne change pas lorsqu'on on ajoute ou on retranche un même nombre à chaque côté de l'inégalité. Autrement dit : Si a, b, x et y sont des nombres réels, alors :
  - ↳ $x \leq y$ équivaut à $x + a \leq y + a$ et $x < y$ équivaut à $x + a < y + a$
  - ↳ $x \leq y$ équivaut à $x - b \leq y - b$ et $x < y$ équivaut à $x - b < y - b$
- ★ Une inégalité ne change pas lorsqu'on multiplie ou on divise ses deux termes de chaque côté de l'inégalité par un même nombre strictement positif. Autrement dit : si x et y sont deux nombres réels et a et b sont des nombres réels strictement positifs, alors :
  - ↳ $x \leq y$ équivaut à $x \times a \leq y \times a$ et $x < y$ équivaut à $x \times a < y \times a$
  - ↳ $x \leq y$ équivaut à $\dfrac{x}{b} \leq \dfrac{y}{b}$ et $x < y$ équivaut à $\dfrac{x}{b} < \dfrac{y}{b}$
- ★ Une inégalité change de sens lorsqu'on multiplie ou on divise ses deux termes de chaque côté de l'inégalité par un nombre strictement négatif. Autrement dit : si x et y sont deux nombres réels et a et b sont des nombres réels strictement négatifs, alors :
  - ↳ $x \leq y$ équivaut à $x \times b \geq y \times b$ et $x < y$ équivaut à $x \times b > y \times b$
  - ↳ $x \leq y$ équivaut à $\dfrac{x}{b} \geq \dfrac{y}{b}$ et $x < y$ équivaut à $\dfrac{x}{b} > \dfrac{y}{b}$

Exemples

- $2x - 1 \leq 3 \Leftrightarrow 2x - 1 + 1 \leq 3 + 1$
  $\Leftrightarrow 2x \leq 4$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{2} \leq \frac{4}{2}$$
$$\Leftrightarrow x \leq 2$$

- $-3x+4<6 \Leftrightarrow -3x+4-4<6-4$
$$\Leftrightarrow -3x<2$$
$$\Leftrightarrow \frac{-3x}{-3} > \frac{2}{-3}$$
$$\Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$$

II – Equation du premier degré à une inconnue

1 – Définition

Définition

- Une équation du premier degré à une inconnue est une égalité qui fait intervenir une variable appelée **inconnue.** Cette égalité peut être vraie ou fausse selon les valeurs de la variable.
- Une valeur de la variable pour laquelle l'égalité est vraie s'appelle **une solution** de l'équation.
- Résoudre une équation revient à déterminer toutes les solutions de cette équation et donner l'ensemble de ses solutions.

Exemples

1) Parmi les nombres $-1; 1$ et 3 déterminer celui qui est solution de l'équation $3x-5=4$.

- Si $x=1$, on a $3\times1-5=-2$ et $-2\neq4$. Alors 1 n'est pas solution de cette équation.
- Si $x=-1$, on a $3\times(-1)-5=-8$ et $-8\neq4$. Alors (-1) n'est pas solution de cette équation
- Si $x=3$, on a $3\times3-5=4$ et $4=4$. Alors 3 est solution de cette équation.

2) L'équation $2x+5=-x+7$ est une équation du premier degré

3) L'équation $3x^2+5=9$ n'est pas une équation du premier degré

Remarque

- Une équation du premier degré à une inconnue est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax+b=0$ où a et b sont des nombres réels donnés.
- Dans une équation du premier degré la variable a une puissance égale à 1.

2 – Résolution d'une équation du premier degré à une inconnue

Exemple 1 : Résoudre l'équation $2x-3=0$

$$2x-3=0 \Leftrightarrow 2x=3$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x}{2}=\frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

Alors l'ensemble de solution de cette équation est $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Exemple 2 : Résoudre l'équation $3x-4=-x+3$

$$3x-4=-x+3 \Leftrightarrow 3x+x=4+3 \quad \text{(On regroupe les } x\text{)}$$
$$\Leftrightarrow 4x=7$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{7}{4}$$

Alors l'ensemble de solution est $S=\left\{\frac{7}{4}\right\}$

Exemple 3 : Résoudre l'équation $2(x-1)+3(x+5)=5(x+2)-(2x-3)$

$$\begin{aligned}2(x-1)+3(x+5)=5(x+2)-(2x-3) &\Leftrightarrow 2x-2+3x+15=5x+10-2x+3\\ &\Leftrightarrow 5x+2x-5x=13+2-15\\ &\Leftrightarrow 2x=0\\ &\Leftrightarrow x=0\end{aligned}$$

Alors l'ensemble de solution de cette équation est $S=\{0\}$

Exemple 4 : Résoudre l'équation $\frac{3}{2}x+\frac{1}{7}=2x$

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}x+\frac{1}{7}=2x &\Leftrightarrow \frac{21x+2}{14}=\frac{28x}{14}\\ &\Leftrightarrow 21x+2=28x\\ &\Leftrightarrow -7x=-2\\ &\Leftrightarrow x=\frac{-2}{-7}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{2}{7}\end{aligned}$$

Alors l'ensemble de solution de cette équation est $S=\left\{\frac{2}{7}\right\}$

Exemple 5 : Résoudre l'équation $\frac{x+3}{5}=\frac{2x-1}{3}$

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{5}=\frac{2x-1}{3} &\Leftrightarrow 3(x+3)=5(2x-1)\\ &\Leftrightarrow 3x+9=10x-5\\ &\Leftrightarrow -7x=-14\\ &\Leftrightarrow x=\frac{-14}{-7}\\ &\Leftrightarrow x=2\end{aligned}$$

Alors l'ensemble solution de cette équation est $S=\{2\}$

Exemple 6 : Résoudre l'équation $3(x-2)=2(x+2)+x-7$

$$\begin{aligned}3(x-2)=2(x+2)+x-7 &\Leftrightarrow 3x-6=2x+4+x-7\\ &\Leftrightarrow 3x-x-2x=4-7+6\\ &\Leftrightarrow 0x=3\end{aligned}$$

Ce qui est impossible. Alors l'ensemble de solution est $S=\varnothing$

Exemple 7 : Résoudre l'équation $2(5x-1)-4x+5=15-3(4-2x)$

$$\begin{aligned}2(5x-1)-4x+5=15-3(4-2x) &\Leftrightarrow 10x-2-4x+5=15-12+6x\\ &\Leftrightarrow 6x-6x=3-3\\ &\Leftrightarrow 0x=0\end{aligned}$$

En remplaçant x par n'importe quel réel l'égalité reste vraie. Alors l'ensemble de solution est $S=\mathbb{R}$

Règle (Résolution d'une équation du premier degré à une inconnue)

Soit $(E): ax = b$ une équation du premier degré à une inconnue.

- Si $a \neq 0$, alors l'équation (E) admet une unique solution $x = \frac{b}{a}$.

  L'ensemble de solution de cette équation est $S = \left\{\frac{b}{a}\right\}$.
- Si $a = 0$
  - Si $b \neq 0$, l'équation (E) n'admet pas de solution. Donc $S = \varnothing$
  - Si $b = 0$, l'équation (E) admet chaque réel pour solution. Donc $S = \mathbb{R}$.

3 – Equations se ramenant aux équations du premier degré

3 – 1 – Equation produit

Règle

Un produit de plusieurs facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

Autrement dit : $A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$

Exemple 1 : Résoudre l'équation $(3x+5)(2x-7)=0$

$$\begin{aligned}(3x+5)(2x-7)=0 &\Leftrightarrow 3x+5=0 \text{ ou } 2x-7=0\\ &\Leftrightarrow 3x=-5 \text{ ou } 2x-7\\ &\Leftrightarrow x=-\frac{5}{3} \text{ ou } x=\frac{7}{2}\end{aligned}$$

Alors, l'ensemble de solutions est $S = \left\{-\frac{5}{3};\frac{7}{2}\right\}$

Exemple 2 : Résoudre l'équation $x^2 - 25 = 0$

$$\begin{aligned}x^2-25=0 &\Leftrightarrow x^2-5^2=0\\ &\Leftrightarrow (x-5)(x+5)=0\\ &\Leftrightarrow x-5=0 \text{ ou } x-5=0\\ &\Leftrightarrow x=5 \text{ ou } x=-5\end{aligned}$$

Alors l'ensemble de solution est $S = \{-5;5\}$

Exemple 3 : Résoudre l'équation $(2x-1)(x+3)-(2x-1)(3x+5)=0$

$$\begin{aligned}(2x-1)(x+3)-(2x-1)(3x+5)=0 &\Leftrightarrow (2x-1)\left[(x+3)-(3x+5)\right]\\ &\Leftrightarrow (2x-1)(x+3-3x-5)=0\\ &\Leftrightarrow (2x-1)(-2x-2)=0\\ &\Leftrightarrow 2x-1=0 \text{ ou } -2x-2=0\\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \text{ ou } x=1\end{aligned}$$

Alors l'ensemble de solution de cette équation est $S = \left\{\frac{1}{2};1\right\}$.

3 – 2 – Egalité de deux carrés

Exemple 1 : Résoudre l'équation $x^2 = 7$

$x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$

Alors l'ensemble des solutions de cette équation est $S=\left\{-\sqrt{7}\ ;\ \sqrt{7}\right\}$

Exemple 2 : Résoudre l'équation $(2x-3)^2=16$

$$\begin{aligned}(2x-3)^2=16 &\Leftrightarrow (2x-3)^2=4^2\\ &\Leftrightarrow 2x-3=4 \text{ ou } 2x-3=-4\\ &\Leftrightarrow 2x=7 \text{ ou } 2x=-1\\ &\Leftrightarrow x=\frac{7}{2} \text{ ou } x=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Alors l'ensemble des solutions de cette équation est $S=\left\{-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{7}{2}\right\}$

Exemple 3 : Résoudre l'équation $(3x+2)^2=(x-3)^2$

$$\begin{aligned}(3x+2)^2=(x-3)^2 &\Leftrightarrow (3x+2)=(x+3) \text{ ou } (3x+2)=-(x+3)\\ &\Leftrightarrow 3x+2=x-3 \text{ ou } 3x+2=-x+3\\ &\Leftrightarrow 2x=-5 \text{ ou } 4x=1\\ &\Leftrightarrow x=-\frac{5}{2} \text{ ou } x=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Alors l'ensemble des solutions de cette équation est $S=\left\{-\frac{5}{2}\ ;\ \frac{1}{4}\right\}$

3 – 3 – Equations rationnelles

Exemple 1 : Résoudre l'équation $\frac{2x+1}{5x-3}=\frac{2}{3}$

- Cette équation a un dénominateur qui contient l'inconnue x, et comme ce dénominateur s'annule en $\frac{3}{5}$ on dira que lme nombre $\frac{3}{5}$ est une valeur interdite de cette équation et on appellera son ensemble de définition l'ensemble des réels privé de la valeur interdite : $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{5}\right\}$
- Si $x\neq\frac{3}{5}$. $\frac{2x+1}{5x-3}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow 3(2x+1)=2(5x-3)$
$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow 6x+3=10x-6\\ &\Leftrightarrow -4x=-9\\ &\Leftrightarrow x=\frac{9}{4}\end{aligned}$$

Comme $\frac{9}{4}\neq\frac{3}{5}$, alors l'ensemble des solutions de cette équation est $S=\left\{\frac{9}{4}\right\}$

Exemple 2 : Résoudre l'équation $\frac{x+2}{2x-3}=\frac{2x+5}{4x-1}$

- Valeurs interdites : $2x-3=0$ et $4x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ et $x=\frac{1}{4}$ Donc $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{4}\ ;\ \frac{3}{5}\right\}$
- Si $x\neq\frac{1}{4}$ et $x\neq\frac{3}{5}$. $\frac{x+2}{2x-3}=\frac{2x+5}{4x-1}\Leftrightarrow (x+2)(4x-1)=(2x+5)(2x-3)$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - x + 8x - 2 = 4x^2 - 6x + 10x - 15$$
$$\Leftrightarrow 7x - 2 = 4x - 15$$
$$\Leftrightarrow 3x = -13$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{13}{3}$$

Comme $-\frac{13}{3} \in D_f$, alors l'ensemble des solutions de cette équation est $S = \left\{-\frac{13}{3}\right\}$

4 – Problèmes utilisant des équations du premier degré

Méthode de résolution d'un problème

La résolution d'un problème se déroule en cinq étapes comme suit :

- ♣ Choix de l'inconnue ou des inconnues
- ♣ Mise en équation du problème
- ♣ Résolution de l'équation
- ♣ Interprétation du résultat dans le contexte du problème
- ♣ Vérification

Problème 1

Trois personnes se partagent une somme de 1500 €. La seconde personne reçoit 70 € de plus que la première personne. La part de la troisième personne est égale au double de la part de la première personne moins 150 €.

Déterminer la part de chaque personne.

Solution

Problème 2

Déterminer trois nombres entiers consécutifs dont la somme est 2025.

Solution

Problème 3

Adam et Myriam ont trois ans de différence et la somme de leurs âges est égale à 31.

Sachant que Myriam est l'aînée, déterminer l'âge de chacun d'eux.

Solution

Problème 4

Un jardin rectangulaire de 50 mètres de longueur et dont l'aire est plus grande de 257 mètres carrés qu'un autre jardin de même forme d'une longueur de 42 mètres et dont la largeur surpasse celle du premier de 1,50 mètre. Calculer la largeur du premier jardin.

Solution