

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n^n e^{-n}}{n!}.$$

1) a) Montrer que $\forall t \in [0,1]; \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{4}.$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e^{1 - \frac{1}{4n}}.$

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq e^{-\frac{1}{4n}}.$

b) En déduire que $\forall n \geq 2; u_n \leq e^{-1 - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}\right)}.$

3) a) Montrer que

$$\forall x \in]0; +\infty[; \frac{1}{1+x} \leq \ln(1+x) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}.$$

b) En déduire que

$$\forall n \geq 2; \ln(n) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}.$$

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq e^{-1 - \frac{1}{4} \ln(n)}.$

d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$



Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}.$

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle

$$[0,1] \text{ par : } f(x) = -e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right).$$

1) a) Démontrer que $\forall x \in [0,1]; 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{n!}.$

b) En déduire que $f(1) \geq f(0).$

2) Soit g la fonction numérique définie sur $[0,1]$ par :

$$g(x) = f(x) - \frac{x}{n!}.$$

a) Etudier les variations de la fonction g sur $[0,1].$

b) Montrer que $f(1) \leq f(0) + \frac{1}{n!}.$

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, e \left(1 - \frac{1}{n!} \right) \leq v_n \leq e.$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq e - v_n \leq \frac{3}{n!}$ et en déduire

que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$



Exercice 3

Partie 1

On considère la fonction numérique g définie par :

$$g(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{x}{x+1} \text{ et soit } (C_g) \text{ sa courbe}$$

représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}).$

1) Montrer que $D_g =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[.$

2) a) Calculer les limites de g en $+\infty$, en $-\infty$ et à droite en 0

b) Montrer que

$$\forall x < -1: g(x) = \ln(-x) + \frac{(-x-1)\ln(-x-1) - x}{x+1}, \text{ puis}$$

en déduire $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x).$

c) En déduire les branches infinies de la courbe $(C_g).$

3) a) Dresser le tableau de variations de la fonction $g.$

b) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $D_g.$

4) Construire la courbe (C_g) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}).$

Partie 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - x; & x > 0 \\ f(x) = e^{-2x} + 2xe^{-x} - 1; & x \leq 0 \end{cases}$$

On désigne par (C_f) la courbe représentative dans un autre repère orthonormé $(O'; \vec{i}', \vec{j}').$

1) Montrer que f est continue en $x_0 = 0.$

2) Montrer que f est dérivable en $x_0 = 0$ puis donner une interprétation graphique des résultats obtenus.

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$

4) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation

graphique de ce résultat.

b) Montrer que la droite $(\Delta): y = -x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

5) Montrer que $\forall x > 0: f'(x) = g(x)$ et que $\forall x < 0: f'(x) = 2(1 - x - e^{-x})e^{-x}$.

6) a) Montrer que $\forall x < 0: 1 - x - e^{-x} < 0$.

b) Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

7) Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le nouveau repère $(O'; \vec{i}', \vec{j}')$.



Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = 1 + x - e^{-nx}$.

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

b) Etudier les variations de f_n et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

2) a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution u_n dans $[0; +\infty[$.

b) Etudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour tout $x \in [0; +\infty[$.

c) Dédire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et qu'elle est convergente.

d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*: u_n = e^{-n u_n}$.

e) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

<https://www.dimamath.com>



**MATHÉMATIQUES
POUR TOUS**