Table des matières

V - Exercices

Partie 1

I – Ensembles remarquables

1– Ensembles des polynômes de degré inférieur ou égal à n : $\mathcal{P}_n$ ou $\mathbb{R}_n[X]$

Définition

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$.

L'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n est :

$$\mathcal{P}_n = \mathbb{R}_n[X] = \{P\epsilon\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) /\ P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \text{ où } (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)\epsilon\mathbb{R}^{n+1}\}$$

On définit l'addition et la multiplication dans $\mathcal{P}_n$ par :

$$\forall (P,Q)\epsilon{\mathcal{P}_n}^2 : \begin{cases} (P+Q)(x) = P(x) + Q(x) \\ (P\times Q)(x) = P(x)\times Q(x) \end{cases}$$

2 – Ensembles des fonctions numériques définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$: $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

L'ensemble des fonctions numériques définies sur l'intervalle I est :

$$\mathcal{F}(\mathbb{I},\mathbb{R}) = \{f /\ f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)\}$$

On définit l'addition et la multiplication dans $\mathcal{F}(\mathbb{I},\mathbb{R})$ par :

$$\left(\forall (f,g)\epsilon\left(\mathcal{F}(\mathbb{I},\mathbb{R})\right)^2\right)(\forall x\epsilon\mathbb{I}) : \begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (f\times g)(x) = f(x)\times g(x) \end{cases}$$

3 – Ensembles des classes d'équivalence modulo n : $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$

Définition

Soit $n\epsilon\mathbb{N}^*$.

L'ensemble des classes d'équivalence modulo n est :

$$\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$$

On définit l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ par :

$$\left(\forall (\bar{x},\bar{y})\epsilon\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right)^2\right) : \begin{cases} \bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y} \\ \bar{x}\times\bar{y} = \overline{x\times y} \end{cases}$$

4 – Ensembles des parties d'un ensemble E : $\mathcal{P}(E)$

Définition

Soit E un ensemble.

L'ensemble de toutes les parties de E est :

$$\mathcal{P}(E) = \{A /A \subset E\}$$

$$\forall (A,B)\epsilon\left(\mathcal{P}(E)\right)^2, on a : \begin{cases} x\epsilon A\cap B \iff x\epsilon A \ et \ x\epsilon B \\ x\epsilon A\cup B \iff x\epsilon A \ ou \ x\epsilon B \\ x\epsilon\bar{A} \iff x \notin A \\ x \in A - B \iff x\epsilon A \ et \ x \notin B \\ x \in A\Delta B \iff x\epsilon A - B \ ou \ x\epsilon B - a \end{cases}$$

5 – Ensemble des matrices carrées d'ordre 2 : $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Définition

L'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 est :

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} /(a,b,c,d)\epsilon\mathbb{R}^4\right\}$$

On définit l'addition et la multiplication dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (a,b,c,d)\epsilon\mathbb{R}^4, \forall (x,y,z,t)\epsilon\mathbb{R}^4 : \begin{cases} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & c+z \\ b+y & d+t \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy & az+ct \\ bx+dy & bz+dt \end{pmatrix} \end{cases}$$

6 – Ensembles des matrices carrées d'ordre 3 : $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Définition

L'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 est :

$$\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} / (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3) \epsilon \mathbb{R}^9 \right\}$$

On définit l'addition et la multiplication dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+x_1 & a_2+x_2 & a_3+x_3 \\ b_1+y_1 & b_2+y_2 & b_3+y_3 \\ c_1+z_1 & c_2+z_2 & c_3+z_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1+a_2y_1+a_3z_1 & a_1x_2+a_2y_2+a_3z_2 & a_1x_3+a_2y_3+a_3z_3 \\ b_1x_1+b_2y_1+b_3z_1 & b_1x_2+b_2y_2+b_3z_2 & b_1x_3+b_2y_3+b_3z_3 \\ c_1x_1+c_2y_1+c_3z_1 & c_1x_2+c_2y_2+c_3z_2 & c_1x_3+c_2y_3+c_3z_3 \end{pmatrix}$$

7 – Ensemble des transformations du plan : $\mathcal{T}$

Définition

- On appelle transformation du plan $\mathcal{P}$ toute application bijective de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$.
- Les ensembles des translations, des homothéties, des rotations sont des parties de l'ensemble de transformations $\mathcal{T}$.
- $(\forall (f,g) \epsilon \mathcal{T}^2)(\forall M \epsilon \mathcal{P}):\ \ (f \circ g)(M) = f(g(M))$.

II – Lois de composition internes

1 - Définition - exemples - notations

Définition

Soit E un ensemble non vide.
On appelle loi de composition interne sur E, toute application $f : E \times E \ \to E$.
Toutefois, en général, au lieu de noter l'image d'un couple (x, y) d'éléments de E par $f(x, y)$ on utilise plus souvent une notation du type : $x * y \ \ ou \ \ x \perp y \ \ ou \ \ x \top y \ \ ou \ \ x + y \ \ ou \ \ x \times y$.
On note $(E, *)$ un ensemble E muni d'une loi de composition interne $*$.

Exemples

Lois de composition internes particulières :

- L'addition $(+)$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{P}_n, \mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{R}), \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- La multiplication $(\times)$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{P}_n, \mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{R}), \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
- L'intersection $(\cap)$, la réunion $(\cup)$, la différence symétrique (Δ) sont des lois de composition internes dans $\mathcal{P}(E)$.

Exercices

1) Soit $E = [0,1]$. Soit $(x, y) \epsilon E$ on pose : $x * y = x + y - xy$.
Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur E.

2) Soit $E = \{(x, y) \epsilon \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = 1\}$.
Soient $(x, y) \epsilon \mathbb{R}^2 \ \ et \ (x', y') \epsilon \mathbb{R}^2$, on pose $(x, y) \top (x', y') = (xx' + yy', xy' + yx')$.
Montrer que $\top$ est une loi de composition interne dans E

3) Soit $E =]-1,1[$.
Soient $(x, y) \epsilon E^2$, on pose : $x \perp y = \frac{x+y}{1+xy}$.
Montrer que $\perp$ est une loi de composition interne dans E

2 – Stabilité des parties pour une loi de composition interne

Définition

Soit $(E,*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$, et soit F une partie de E.
On dit que F est stable par $*$ si et seulement si pour tout x et y de F on a : $x * y \in F$.
On dit que $*$ définie une loi de composition interne dans F appelée loi induite par $*$ sur F

Exemples

1) Montrer que $A = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R}\right\}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

2) Montrer que $F = \{z\in\mathbb{C}/R_e(z) \geq 0\}$ est une partie stable de $(\mathbb{C},+)$ mais n'est pas une partie stable de $(\mathbb{C},\times)$

3) Montrer que $G = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} / (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$

3 – Propriétés des lois de composition internes

3 – 1 - Commutativité

Définition

Soit $(E,*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$.
On dit que la loi $*$ est commutative dans $(E,*)$ si et seulement si pour tout $(x,y)\epsilon E^2$ on a: $x * y = y * x$

Remarque

La loi $*$ n'est pas commutative dans $(E,*) \Leftrightarrow\ (\exists(a,b)\epsilon E^2:\ a * b \neq b * a$

Exemples

1) L'addition est commutative dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{P}_n, \mathcal{F}(\mathbb{I},\mathbb{R}), \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2) La multiplication est commutative dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{P}_n, \mathcal{F}(\mathbb{I},\mathbb{R}), \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}},$ mais elle n'est pas commutative dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), et\ \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3 – 2 - Associativité

Définition

Soit $(E,*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$.
On dit que la loi $*$ est associative dans $(E,*)$ si et seulement si pour tout $(x,y,z)\epsilon E^3$ on a :

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

Remarques

- La loi $*$ n'est pas associative dans $(E,*) \Leftrightarrow\ (\exists(a,b,c)\epsilon E^3:\ (a * b) * c \neq a * (b * c)$
- Si la loi $*$ est associative dans $(E,*)$, alors on peut écrire : $(a * b) * c = a * (b * c) = a * b * c$

Exemples

1) L'addition est associative dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{P}_n, \mathcal{F}(\mathbb{I},\mathbb{R}), \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2) La multiplication est associative dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{P}_n, \mathcal{F}(\mathbb{I},\mathbb{R}), \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3) La réunion $(\cup)$ et l'intersection $(\cap)$ sont associatives respectivement dans $(\mathcal{P}(E),\cup)$ et $(\mathcal{P}(E),\cap)$.

3 – 3 - Elément neutre

Définition

Soit $(E,*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$. Soit $e \epsilon E$.
On dit que e est un élément neutre de $(E,*)$ si et seulement si : $(\forall x \epsilon E):\ x * e = e * x = x$

Exemples

1) 0 est l'élément neutre de $(\mathbb{N},+);\ (\mathbb{Z},+);\ (\mathbb{Q},+);\ (\mathbb{R},+);\ (\mathbb{C},+)$

2) 1 est l'élément neutre de $(\mathbb{N}^*,\times);\ (\mathbb{Z},^*\times);\ (\mathbb{Q}^*,\times);\ (\mathbb{R}^*,\times);\ (\mathbb{C}^*,\times)$

3) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ La matrice nulle $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est l'élément de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$

4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$.

Proposition

Soit $(E,*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$.
Si e est un élément neutre de $(E,*)$, alors il est unique

Remarques

- Si la loi de composition interne $*$ est commutative, alors pour montrer que e est l'élément neutre de $(E,*)$ il suffit de montrer seulement l'une des égalités : $(\forall x \in E): \ x * e = x$ ou $(\forall x \in E): \ e * x = x$.
- Si A est une partie stable de $(E,*)$ et si e est l'élément neutre de $(E,*)$ alors n'est pas nécessairement l'élément neutre de $(A,*)$

Exemples

1) On munit $\mathbb{Z}$ de la relation $*$ définie par : $(\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2: \ x * y = x + y + 2)$.
   a) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{Z}$.
   b) Montrer que $*$ est associative et commutative
   c) Montrer que $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera
2) Soit $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -4b & a+2b \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
   a) Montrer que + est une loi de composition interne dans E
   b) Montrer que + est associative et commutative
   c) la loi + admet-elle un élément neutre dans E ?

3 - 4 - Eléments symétrisables

Définition

Soit $(E,*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$, soit e l'élément neutre de $(E,*)$ et soit $x \in E$.
On dit que x est symétrisable ou inversible pour la loi $*$ si et seulement s'il existe $x' \in E$ tel que :
$x * x' = x' * x = e$
L'élément x' de E s'appelle le symétrique ou l'inverse de x pour $*$.

Remarques

- Si x' est le symétrique de x pour la loi $*$, alors x est le symétrique de x' pour la loi $*$.
- Si x' est le symétrique de x pour la loi $*$, on dit que x et x' sont symétriques dans $(E,*)$
- Si la loi $*$ est commutative, pour montrer que x et x' sont symétriques dans $(E,*)$ on peut se contenter à montrer que $x * x' = e$ ou $x' * x = e$.

Exemples

1) Dans $(\mathbb{Z},+)$; $(\mathbb{Q},+)$; $(\mathbb{R},+)$; $(\mathbb{C},+)$, Chaque élément x admet un symétrique x' qui est son opposé : $x' = -x$.
2) Dans $(\mathbb{Q}^*,\times)$; $(\mathbb{R}^*,\times)$; $(\mathbb{C}^*,\times)$, Chaque élément x admet un symétrique x' qui est son inverse : $x' = x^{-1}$.
3) Dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ est le symétrique de la matrice $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, en revanche la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ n'a pas de symétrique.

Proposition 1 (unicité du symétrique)

Soit $(E,*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne associative $*$ qui admet un élément neutre e.
Si x est symétrisable dans $(E,*)$, alors le symétrique de x est unique.

Preuve

Soit $x \in E$. Supposons que x admet deux symétriques x' et x'' donc on a : $x * x' = x' * x = e$ et $x * x'' = x'' * x = e$.
Comme $*$ est associative, alors : $x'' = x'' * e = x'' * (x * x') = (x'' * x) * x' = e * x' = x'$. d'où $x'' = x'$.

Proposition 2

Soit $(E,*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne associative $*$ qui admet un élément neutre e.
Soient x et y deux éléments symétrisables dans $(E,*)$ de symétriques respectifs x' et y' , alors $x * y$ est symétrisable dans $(E,*)$ et son symétrique est $(x * y)' = y' * x'$.

Preuve

On a : $(x * y) * (y' * x') = x * (y * y') * x' = x * e * x' = x * x' = e$

et $(y' * x') * (x * y) = y' * (x' * x) * y = y' * e * y = y' * y = e$ D'où $(x * y)' = y' * x'$

Exemples

- Soient f *et* g deux applications bijectives d'un ensemble dans lui-même, alors $f \circ g$ est une application bijective de E dans E et sa bijection réciproque est : $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
- Soient M et N deux matrices inversibles dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$, alors M×N est inversible et sa matrice inverse est : $(M \times N)^{-1} = N^{-1} \times M^{-1}$.

3 – 5 - Elément absorbant

Définition

Soit $(E,*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$, et $a \in E$.
On dit que a est un élément absorbant pour $*$ si et seulement si pour tout $x \in E$, on a : $a * x = x * a = a.$

Exemples

- Dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$, le nombre 0 est un élément absorbant pour la multiplication.
- Dans $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble E est l'élément absorbant pour l'intersection
- Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est l'élément absorbant pour la multiplication.

3 – 6 - Eléments réguliers

Définition

Soit $(E,*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$, et $a \in E$.
On dit que a est un élément régulier pour $*$ si et seulement si pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

$$\begin{cases} a * x = a * y & \Rightarrow x = y \\ x * a = y * a & \Rightarrow x = y \end{cases}.$$

Remarque

- Si la loi $*$ est commutative dans E , pour montrer que a est un élément régulier pour $*$, il suffit de montrer seulement l'une des deux implications : $a * x = a * y \Rightarrow x = y$ ou $x * a = y * a \Rightarrow x = y$.
- Pour dire aussi qu'un élément a est régulier, on dit aussi simplifiable.

III – Morphismes

1 – Définition et exemples

Définition

Soient $(E,*)$ *et* $(F,\top)$ deux ensembles munis de deux lois de composition internes $*$ *et* $\top$, et soit f une application de E vers F.

- On dit que f est un morphisme de $(E,*)$ dans $(F,\top)$ si et seulement si
$$(\forall (x, y) \epsilon E^2 : f(x * y) = f(x) \top f(y))$$
- Un morphisme est appelé aussi un homomorphisme
- un endomorphisme de $(E,*)$ est un homomorphisme de $(E,*)$ dans lui-même
- Un isomorphisme de $(E,*)$ dans $(F,\top)$ est un homomorphisme bijectif de $(E,*)$ dans $(F,\top)$
- Un automorphisme de $(E,*)$ est un endomorphisme bijectif de $(E,*)$

Exemples

1) L'application $f: x \mapsto e^x$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}_+^*,\times)$

2) L'application $g: x \longmapsto \ln(x)$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$

2 – Propriétés des morphismes

Proposition

Soit f un morphisme de $(E,*)$ dans $(F,\top)$.

- ★ $f(E)$ est une partie stable de $(F,\top)$.
- ★ Si la loi $*$ est associative dans E, alors la loi $\top$ est associative dans $f(E)$.

- ★ Si la loi $*$ est commutative dans E, alors la loi $\top$ est commutative dans $f(E)$.
- ★ Si e est l'élément neutre de la loi $*$ dans E, alors $f(e)$ est l'élément neutre de la loi $\top$ dans $f(E)$.
- ★ Si x' est le symétrique de x dans $(E,*)$, alors $f(x')$ est le symétrique de $f(x)$ dans $(f(E),\top)$.
- ★ Si f est bijectif de E dans F, alors : $f(E) = F$.

Corollaire

Si f un isomorphisme de $(E,*)$ dans $(F,\top)$, alors f transfère toutes les propriétés de la loi $*$ dans $(E,*)$ à la loi $\top$ dans $(F,\top)$. On dit que $(E,*)$ et $(F,\top)$ ont la même structure.

Exemples

1) Soit f un homomorphisme de $(E,*)$ dans $(F,\top)$.

a) Soit B une partie stable de $(F,\top)$. Montrer que $f^{-1}(B)$ est une partie stable de $(E,*)$.

b) Soit A une partie stable de $(E,*)$. Montrer que $f(A)$ est une partie stable de $(F,\top)$.

2) Soit $F = \left\{\begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R}\right\}$ et $\begin{cases} f : \mathbb{R} \longrightarrow F \\ \quad x \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$.

a) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(F, +)$.

b) Sachant que 0 est l'élément neutre de $(\mathbb{R}, +)$, Déterminer l'élément neutre de $(F, +)$.

c) Montrer que + est associative et commutative dans F

d) Déterminer le symétrique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

IV – Groupes

1 – Définition et exemples

Définition

Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition $*$.

- On dit que $(G ,*)$ est un groupe si et seulement si $\begin{cases} \text{La loi } * \text{ est associative} \\ \text{La loi } * \text{ admet un élément neutre dans G} \\ \text{Tout élément de G admet un symétrique dans G} \end{cases}$
- Si en plus la loi $*$ est commutative, le groupe $(G ,*)$ est dit commutatif ou abélien

Exemples

1) $(\mathbb{Z}, +)$; $(\mathbb{Q}, +)$; $(\mathbb{R}, +)$; $(\mathbb{C}, +)$ sont des groupes commutatifs.

2) $(\mathbb{Q}^*,\times)$; $(\mathbb{R}^*,\times)$; $(\mathbb{C}^*,\times)$ sont des groupes commutatifs.

3) $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ et $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$ sont des groupes commutatifs.

4) $\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, +\right)$ est un groupe commutatif

2 – Propriétés des groupes

Proposition 1

Soit $(G ,*)$ un groupe. Alors :

- ★ G est non vide. G contient au moins son élément neutre
- ★ Son élément neutre e est unique.
- ★ Chaque élément x de G admet un unique symétrique x'
- ★ Si x' est le symétrique de x et y' est le symétrique de y , alors le symétrique de $x * y$ est :
  $(x * y)' = y' * x'$
- ★ Chaque élément de G est régulier

Proposition 2

Soit $(G ,*)$ un groupe d'élément neutre e et soit $(a, b) \in G^2$ et a' le symétrique de a dans $(G ,*)$. alors:

- ★ L'équation $a * x = b$, d'inconnue x, admet une unique solution dans G : $x = a' * b$
  Autrement dit : $a * x = b \iff x = a' * b$

★ L'équation $x * a = b$, d'inconnue x, admet une unique solution dans G : $x = b * a'$
Autrement dit : $x * a = b \iff x = b * a'$

Exercice

On définit la relation $\perp$ dans $\mathbb{R}$ par : $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \perp b = \ln(e^a + e^b)$.

1) Montrer que $(\mathbb{R}, \perp)$ est un groupe commutatif.

2) Montrer que tout réel est régulier dans $(\mathbb{R}, \perp)$.

3) Résoudre l'équation : $x \perp 3 = -1$

3 – Sous-groupes

Définition

Soit $(G,*)$ un groupe et soit H une partie non vide de G.

On dit que $(H,*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$ si et seulement si : $\begin{cases} H \text{ est stable pour la loi } * \\ (H,*) \text{ est un groupe} \end{cases}$

Exemples

1) $(\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

2) $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ car 1 n'a pas de symétrique dans $(\mathbb{N}, +)$.

3) Soit $(G,*)$ un groupe d'élément neutre e, alors $\{e\}$ est un sous-groupe de $(G,*)$.

Proposition

Soit $(G,*)$ un groupe et $(H,*)$ un sous-groupe de $(G,*)$. Alors :

- ★ $H \neq \emptyset$
- ★ Si e est l'élément neutre dans $(G,*)$, alors e est aussi l'élément neutre dans $(H,*)$.
- ★ Si $x \in H$, le symétrique de x dans $(G,*)$ est le symétrique de x dans $(H,*)$.
- ★ $(\forall (x,y) \in H^2):\ x * y \in H$.
- ★ $(\forall (x,y) \in H^2):\ x * y' \in H$ où y' est le symétrique de y dans $(G,*)$.

Propriété caractéristique d'un sous-groupe

Soit $(G,*)$ un groupe et soit H une partie de G.

$(H,*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$ $\iff \begin{cases} H \neq \emptyset \\ (\forall (x,y) \in H^2):\ x * y' \in H \end{cases}$ (où y' est le symétrique de y dans $(G,*)$)

Remarque

Dorénavant, on peut noter les lois de composition internes par + ou par x.

Pour montrer que $(H,*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$ on peut utiliser les natations additive et multiplicative :

- ♦ Avec la notation additive : $\begin{cases} H \neq \emptyset \\ (\forall (x,y) \in H^2):\ x - y \in H \end{cases}$
- ♦ Avec la notation multiplicative : $\begin{cases} H \neq \emptyset \\ (\forall (x,y) \in H^2):\ x \times y^{-1} \in H \end{cases}$

4 – Morphismes de groupes

Proposition

Soit f un morphisme de $(G,*)$ dans $(F,\perp)$.

- ★ Si $(G,*)$ est un groupe, alors $(f(G),\perp)$ est un groupe.
- ★ Si f est un isomorphisme et $(G,*)$ est un groupe, alors $(F,\perp)$ est aussi un groupe.

Remarque

Tout morphisme d'un groupe $(G,*)$ dans un groupe $(F,\perp)$, est appelé un morphisme de groupes

Exercice

On définit sur $\mathbb{R}$, la loi de composition $*$ par : $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)$, $x * y = x + y - 3xy$

1) a) Vérifier que : $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right),\ (1-3x)(1-3y)=1-3(x*y)$

b) Montrer que $\left(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$ est un groupe commutatif.

2) On considère l'application $\begin{array}{l}\varphi:\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}\to\mathbb{R}^*\\ \quad x\ \mapsto 1-3x\end{array}$.

Montrer que φ est un isomorphisme de $\left(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$ dans $\left(\mathbb{R}^*,\times\right)$

V – Anneaux

1 – Distributivité d'une loi par rapport à une autre loi

Définition

Soit E un ensemble non vide muni de deux lois de composition internes $*$ et $\top$.

On dit que la loi $\top$ est distributive par rapport à la loi $*$ si et seulement si :

$$\left(\forall(x,y,z)\in E^3\right):\begin{cases}x\top(y*z)=(x\top y)*(x\top z)\\(y*z)\top x=(y\top x)*(z\top x)\end{cases}$$

Exemples

1) Sur les ensembles $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ la multiplication $\times$ est distributive par rapport à l'addition +

2) Sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ et\ \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la multiplication $\times$ est distributive par rapport à l'addition +

2) Sur $\mathcal{P}(E)$ la réunion ∪ est distributive par rapport à l'intersection ∩

2 – Structure d'anneaux

Définition

Soit A un ensemble non vide muni de deux lois de composition internes $*$ et $\top$.

- On dit que $(A,*,\top)$ est un anneau si et seulement si :
  $\begin{cases}(A,*) \text{ est un groupe commutatif}\\ \text{La loi } \top \text{ est associative et distributive par rapport à la loi } *\end{cases}$
- On dit que $(A,*,\top)$ est un anneau commutatif si et seulement si $\begin{cases}(A,*,T) \text{ est un anneau}\\ \text{La loi } \top \text{ est commutative}\end{cases}$
- On dit que $(A,*,\top)$ est un anneau unitaire si et seulement si $\begin{cases}(A,*) \text{ est un anneau}\\ \text{La loi } \top \text{ afmet un élément neutre}\end{cases}$

Exemples

1) $(\mathbb{Z},+,\times)$; $(\mathbb{Q},+,\times)$; $(\mathbb{R},+,\times)$ et $(\mathbb{C},+,\times)$ Sont des anneaux commutatifs unitaires.

2) $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ et $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ sont deux anneaux unitaires non commutatifs

3) $\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}},+,\times\right)$ est un anneau commutatif unitaire ($n\geq 2$)

3 – Règles de calculs dans un anneau

Proposition 1

Soit $(A,*,\top)$ un anneau unitaire d'éléments neutres 0_A et 1_A respectivement dans $(A,*)$ et $(A,\top)$. Alors :

Pour tout $x\in A$: $0_A\top x=x\top 0_A=0_A$

- ★ Pour tout $(x,y)\in A^2$: $x'\top y=x\top y'=(x*y)'$ où x' et y' sont les symétriques respectifs de x et y dans $(A,*)$
- ★ Pour tout $(x,y)\in A^2$: $x'\top y'=x\top y$ où x' et y' sont les symétriques respectifs de x et y dans $(A,*)$

Notation additive et notation multiplicative dans un anneau :

- Dans un anneau la première loi est notée, habituellement, $+$; l'élément neutre de + est noté 0 et le symétrique de x est noté $(-x)$.
- Dans un anneau la deuxième loi est notée, habituellement, $\times$; l'élément neutre de $\times$ est noté 1 et le symétrique de x est noté x^{-1}.

Proposition 2

Soit $(A,+\ \times)$ un anneau unitaire. Alors :

- ★ Pour tout $x \in A$: $0 \times x = x \times 0 = 0$ (0 est l'élément absorbant de la loi $\times$)
- ★ Pour tout $x \in A$: $(-1) \times x = x \times (-1) = -x$
- ★ Pour tout $(x,y) \in A^2$: $(-x) \times y = x \times (-y) = -(x+y)$
- ★ Pour tout $(x,y) \in A^2$: $(-x) \times (-y) = x \times y$

4 – Diviseurs de zéro dans un anneau - Anneau intègre

Définition 1

Soit $(A,+\ \times)$ un anneau et soit $a \in A-\{0_A\}$.

On dit que a est un diviseur de zéro dans l'anneau $(A,+\ \times)$ si et seulement s'il existe $b \in A-\{0_A\}$ tel que :

$$a \times b = 0_A \quad ou \quad b \times a = 0_A$$

Exemples

1) Dans l'anneau $\left(\mathbb{Z}/_{10\mathbb{Z}},+,\times\right)$ on a $\bar{2} \neq \bar{0}\ et\ \bar{5} \neq \bar{0}\ et\ \bar{2} \times \bar{5} = \bar{0}$. Donc $\bar{2}\ et\ \bar{5}$ sont des diviseurs de zéro dans $\left(\mathbb{Z}/_{10\mathbb{Z}},+,\times\right)$

2) Dans l'anneau $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est un diviseur de zéro car $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on a :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition 2

On dit qu'un anneau $(A,+\ \times)$ est intègre si et seulement si : $\begin{cases} A \neq \{0_A\} \\ n'admet aucun\ diviseur\ de\ zéro \end{cases}$

Autrement dit : $(A,+\ \times)$ est intègre $\Leftrightarrow$ $[(\forall (a,b) \in A^2);\ a \times b = 0_A \implies (a = 0_A\ ou\ \ b = 0_A)]$

Exemples

1) $(\mathbb{Z},+,\times)$; $(\mathbb{Q},+,\times)$; $(\mathbb{R},+,\times)$ et $(\mathbb{C},+,\times)$ sont des anneaux intègres

2) Les anneaux $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$, $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ et $\left(\mathbb{Z}/_{10\mathbb{Z}},+,\times\right)$ ne sont pas intègres

Proposition

Soit $(A,+\ \times)$ un anneau unitaire et soit $a \in A-\{0_A\}$.

Si a est inversible dans $(A,\times)$, alors a n'est pas un diviseur de zéro dans l'anneau $(A,+\ \times)$.

Remarque

Si tout élément de $A-\{0_A\}$ est inversible dans $(A,\times)$, alors l'anneau $(A,+\ \times)$ est intègre

Proposition 2

Soit $M = \begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix}$ une matrice de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$.

- ★ Le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix}$ est le nombre réel : $\det M = \begin{vmatrix} a & d \\ b & c \end{vmatrix} = ac - bd$
- ★ La matrice $M = \begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix}$ est inversible dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ si et seulement si $\det M \neq 0$
- ★ Si la matrice $M = \begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix}$ est inversible alors sa matrice inverse est donnée par :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\begin{pmatrix} c & -b \\ -d & a \end{pmatrix}$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et calculer sa matrice inverse A^{-1}.

En effet, A est inversible car $\det A = 2 \times 3 - 5 \times 1 = 6 - 5 = 1 \neq 0$.

Et on a $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

VI – Corps

Définition

- On dit que $(K,+,\times)$ est un corps si et seulement si :
$$\begin{cases} K \neq \{0_K\} \\ (K,+,\times) \text{ est un anneau unitaire} \\ (\forall x \in K - \{0_K\}) : x \text{ est inversible dans } (K,\times) \end{cases}$$
- Si en plus la loi $\times$ est commutative, on dit que $(K,+,\times)$ est un corps commutatif.

Exemples

1) $(\mathbb{Q},+,\times)$; $(\mathbb{R},+,\times)$ et $(\mathbb{C},+,\times)$ sont des corps commutatifs.
2) $(\mathbb{Z},+,\times)$, $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ et $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ ne sont pas des corps mais seulement des anneaux unitaires.
3) $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau commutatif, en revanche $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ et $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ ne sont pas commutatifs.

Proposition

Soit $(K,+,\times)$ un ensemble non vide et muni de deux lois de composition internes $+$ et $\times$.

★ $(K,+,\times)$ est un corps $\Leftrightarrow \begin{cases} (K,+) \text{ est un groupe commutatif} \\ (K - \{0_K\},\times) \text{ est un groupe} \\ \text{La loi } \times \text{ est distributive par rapport à la loi } + \end{cases}$

★ $(K,+,\times)$ est un corps commutatif $\Leftrightarrow \begin{cases} (K,+,\times) \text{ est un corps} \\ \text{La loi } \times \text{ est commutative dans K} \end{cases}$

Remarque

La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$ si et seulement si :
$$(\forall (a,b,c) \in K^3, a \times (b+c) = a \times b + a \times c \; et \; (b+c) \times a = b \times a + c \times a$$

Proposition 2

Soit $(K,+,\times)$ un corps. Alors :

★ Tout élément de $K - \{0_K\}$ est régulier pour la loi $\times$
Autrement dit :
$(\forall a \in K - \{0_K\})(\forall (x,y) \in K^2), [a \times x = a \times y \implies x = y] \; et \; [x \times a = y \times a \implies x = y]$

★ $(K,+,\times)$ est un anneau unitaire et intègre mais la réciproque est fausse

★ $(\forall a \in K - \{0_K\})(\forall x \in K) : [a \times x = b \Leftrightarrow x = a^{-1} \times b] \;\; et \;\; [x \times a = b \Leftrightarrow x = b \times a^{-1}]$

Exercice

On définit dans $\mathbb{R}^2$ deux lois de composition internes $+$ et $\times$ par :
$(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2)\big((\forall (a',b') \in \mathbb{R}^2) : (a,b) + (a' + b') = (a + a', b + b')\big)$ et
$(a,b) \times (a',b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$
Montrer que $(\mathbb{R}^2,+,\times)$ est un corps commutatif

VII - Exercices

Partie 2

I – Lois de composition externes

Définition

Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un ensemble non vide.
On appelle loi de composition externe de $\mathbb{K}$ sur E, toute application de $\mathbb{K} \times E$ dans E telle que à tout couple (λ, x) de $\mathbb{K} \times E$ elle associe $\lambda . x$ dans E.
Autrement dit : On dit que « . » est une loi de composition externe sur de $\mathbb{K}$ sur E si, et seulement si $\forall(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, $\lambda . x \in E$.

Remarques

- Si $E = \mathbb{K}$, alors la loi « . » est à la fois une LCI et une LCE.
- Dans la suite de ce chapitre on pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Exemples

- Dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} / (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\right\}$ on définit une loi de composition externe par : $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \lambda . M = \lambda . \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \times a & \lambda \times c \\ \lambda \times b & \lambda \times d \end{pmatrix}$
- Dans l'ensemble $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x \in \mathbb{R}\ et\ y \in \mathbb{R}\}$ on définit une loi de composition externe par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda.(a,b) = (\lambda \times a, \lambda \times b)$$

II – Espaces vectoriels réels

1 – Définition – exemples

Définition

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne $"*"$ et d'une loi de composition externe $"."$ à coefficients réels.
On dit que $(E, *, .)$ est un espace vectoriel réel (ou un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel) si, et seulement si :

- $(E, *)$ est un groupe commutatif
- La loi de composition externe $"."$ vérifie les quatre axiomes suivants :
  - $(\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2)(\forall a \in E),\ (\alpha + \beta).a = \alpha.a + \beta.a$
  - $(\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2)(\forall a \in E),\ (\alpha \times \beta).a = \alpha.(\beta.a)$
  - $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall (a,b) \in E^2),\ \alpha.(a * b) = \alpha.a * \alpha.b$
  - $(\forall a \in E),\ 1.a = a$

Notations

- Dans la suite la loi de composition interne est notée « + »
- L'espace vectoriel réel $(E, +, .)$ est noté E lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.
- L'élément neutre du groupe $(E, +)$ est noté 0_E
- Les éléments de l'espace vectoriel réel $(E, +, .)$ sont appelés des vecteurs et les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés des scalaires.

Exemples

$(\mathbb{R}; +, .)$, $(\mathbb{C}; +, .)$, $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); +, .)$, $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}); +, .)$, $(\mathbb{R}^2; +, .)$, $(\mathbb{R}^3; +, .)$ sont des espaces **vectoriels réels.**

2 – Règles de calcul dans un espace vectoriel réel

Propriétés

Soit $(E;+,.)$ Un espace vectoriel réel et 0_E l'élément neutre de $+$ dans E.

- $\forall a \in E,\ 0.a = 0_E$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda.0_E = 0_E$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in E : \alpha.x = 0_E \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } x = 0_E$
- $\forall a \in E,\ (-1).a = -a$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall a \in E,\ (-\alpha).a = -\alpha.a = \alpha.(-a)$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall (a,b) \in E^2,\ \alpha.(a-b) = \alpha.a - \alpha.b$.
- $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall a \in E,\ (\alpha-\beta).a = \alpha.a - \beta.a$.

Exemples

1) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $A^2 + 2A + 2I_2 = 0_2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(2x-1)(A+3I_2)(A-I_2) = -(4+x)I_2$

2) On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer B^3 *et* B^2 et en déduire que $B^3 = B^2 + 2B$

III – Sous-espaces vectoriels

1 – Définition – Exemples

Définition

Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel réel et H une partie non vide de E.

On dit que H est un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} H \text{ est stable pour la loi } + \\ H \text{ est stable pour la loi externe .} \\ (H;+,.) \text{ est un espace vectoriel réel} \end{cases}$$

Exemple

1) $\mathbb{R}$ *et* $i\mathbb{R}$ sont deux sous-espaces vectoriels réels de $(\mathbb{C};+,.)$

2) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^2,+,.)$ car F n'est pas stable pour + .

2 – Propriétés

Propriété caractéristique d'un sous-espace vectoriel

Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel réel et H une partie de E.

H est un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} H \neq \varnothing \\ \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (a,b) \in H^2 : \alpha.a + \beta.b \in H \end{cases}$

Remarques

- Pour montrer que $H \neq \varnothing$, il suffit de montrer que $0_E \in H$
- Si $0_E \notin H$, alors H n'est pas un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$.

- Pour montrer que $(H,+,.)$ est un espace vectoriel réel, il suffit de montrer que H est un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$. En particulier si $(E,+,.)$ est l'un des espaces vectoriels suivants :
$(\mathbb{R}^2,+,.)$; $(\mathbb{R}^3,+,.)$; $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$; $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,.)$; $(\mathbb{R}_n[X],+,.)$; $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}),+,.)$; ...

Exemples

1) Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{R}^3,+,.)$:

$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x+2y-z=0\}$; $F=\{(x-y,2x-y,-3x+2y)/ x\in\mathbb{R}\ et\ y\in\mathbb{R}\}$

2) On considère l'ensemble $V=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

Montrer que $(V,+,.)$ est un espace vectoriel réel.

3) On considère l'ensemble $V'=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix} a & 3b & 2b \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

Montrer que $(V',+,.)$ est un espace vectoriel réel.

IV -Familles libres – Familles génératrices - Bases

1 – Combinaisons linéaires

Définition

Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel réel et $x_1,x_2,...,x_n$ des vecteurs de E et $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ des réels.

Le vecteur $v=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k.x_k=\alpha_1.x_1+\alpha_2.x_2+...+\alpha_n.x_n$ est appelé une combinaison linéaire des vecteurs $x_1,x_2,...,x_n$ de coefficients $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$

Exemples

- Si $\vec{u}$ est un vecteur, alors les combinaisons linéaires de $\vec{u}$ sont les vecteurs $\alpha.\vec{u}$ où $\alpha\in\mathbb{R}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, alors les combinaisons linéaires de la famille à deux vecteurs $(\vec{u},\vec{v})$ sont les vecteurs $\alpha.\vec{u}+\beta.\vec{v}$ où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.
- Si $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs, alors les combinaisons linéaires de la famille à trois vecteurs $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ sont les vecteurs $\alpha.\vec{u}+\beta.\vec{v}+\gamma\vec{w}$ où $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$
- La matrice $\begin{pmatrix} a & 2a-b \\ 2b & -2a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 2a \\ 0 & -2a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -b \\ 2b & 0\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0\end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire des deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0\end{pmatrix}$

2 – Familles libres – Familles liées

Définitions

Soit E un espace vectoriel réel et $(x_1,x_2,...,x_n)$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que la famille $(x_1,x_2,...,x_n)$ est une famille libre de E si, et seulement si :

$$\forall(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n,\ \sum_{k=1}^{n}\alpha_k.x_k=0_E\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$$

On dit aussi que les vecteurs $x_1,x_2,...,x_n$ sont linéairement indépendants.

- On dit que la famille $(x_1,x_2,...,x_n)$ est une famille liée de E si elle n'est pas libre

  Autrement dit : la famille $(x_1,x_2,...,x_n)$ est une famille liée de E si, et seulement si :

  Il existe $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ non tous nuls tels que $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k.x_k=0_E$.

  On dit aussi que les vecteurs $x_1,x_2,...,x_n$ sont linéairement dépendants.

Exemples

1) On pose $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ forment une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

En effet : Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $a.A+b.B=0_2\Rightarrow a.\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\b&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}a&0\\b&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}\Rightarrow a=b=0$$

Donc la famille (A,B) est libre.

2) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\vec{u}=(0,2,-3)$ et $\vec{v}=(1,4,0)$. Montrer que la famille $(\vec{u},\vec{v})$ est libre.

En effet : Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $a.\vec{u}+b.\vec{v}=(0,0,0)\Rightarrow a.(0,2,-3)+b.(1,4,0)=(0,0,0)$

$$\Rightarrow(0,2a,-3a)+(b,4b,0)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow(b,2a+4b,-3a)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=0\\2a+4b=0\\-3a=0\end{cases}\Rightarrow a=b=0$$

Donc la famille $(\vec{u},\vec{v})$ est libre.

Proposition

Soit E un espace vectoriel réel et A et B deux familles de vecteurs de E.

- ★ Si $A=\{a\}$ avec $a\neq0_E$, alors A est une famille libre de E.
- ★ Les éléments d'une famille libre sont distincts deux à deux.
- ★ $\begin{cases}\text{A est une famille libre de E}\\ B\subset A\end{cases}\Rightarrow$ B est une famille libre de E .
- ★ $\begin{cases}\text{B est une famille liée de E}\\ B\subset A\end{cases}\Rightarrow$ A est une famille liée de E
- ★ Une famille B est liée un de ses vecteurs peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Remarque

Pour montrer qu'une famille $(x_1,x_2,...,x_n)$ est libre ou liée, on procède comme suit :

- ♣ On considère $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k.x_k=0_E$:

- Si on arrive à montrer que $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$, alors la famille $(x_1,x_2,...,x_n)$ est libre.
- Si on arrive à trouver $\alpha_k\neq 0$ où $k\in\{1,2,...,n\}$, alors la famille $(x_1,x_2,...,x_n)$ est liée.

3) Familles génératrices

Définition

Soit E un espace vectoriel réel et $(x_1,x_2,...,x_n)$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que la famille $(x_1,x_2,...,x_n)$ est une famille génératrice de E si, et seulement si :

$$(\forall x\in E)\left(\exists(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n\right): x=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k.x_k$$

On dit aussi que la famille $(x_1,x_2,...,x_n)$ engendre l'espace vectoriel E

Exemples

1) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs $\vec{e}_1=(1,0)$ *et* $\vec{e}_2=(0,1)$. Montrer que la famille $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ engendre $\mathbb{R}^2$.

En effet, Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a : $(a,b)=(a,0)+(0,b)=a.(1,0)+b.(0,1)=a.\vec{e}_1+b.\vec{e}_2$

Donc $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

2) On pose $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x-y+z=0\}$

a) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3,+,.)$.

b) Montrer que F est engendré par les vecteurs $(1,2,0)$ *et* $(0,1,1)$

4) Base d'un espace vectoriel réel

Définition

Soit E un espace vectoriel réel et $\mathrm{B}=(x_1,x_2,...,x_n)$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que la famille $\mathrm{B}=(x_1,x_2,...,x_n)$ est une base de E si, et seulement si B est une famille libre et génératrice de E
- Autrement dit : $\mathrm{B}=(x_1,x_2,...,x_n)$ est une base de E $\Leftrightarrow$

$$(\forall x\in E)\left(\exists!(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n\right): x=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k.x_k$$

- On dit aussi que la famille $(x_1,x_2,...,x_n)$ engendre l'espace vectoriel E
- Les nombres réels $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ s'appellent les composantes ou les coordonnées du vecteur x dans la base B. On note $x(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)_{(B)}$ ou seulement $x(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Exemples

- Dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $e_1=(1,0)$ *et* $e_2=(0,1)$ forment une base appelée base canonique de $\mathbb{R}^2$.
- Dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ *et* $e_3=(0,0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ appelée base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- Dans l'espace vectoriel réel de matrices carrées d'ordre 2 $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, les matrices $A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ *et* $A_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ forment une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ appelée base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Dans l'espace vectoriel réel des nombres complexes $(\mathbb{C},+,.)$, les nombres complexes $z_1 = 1$ et $z_2 = i$ forment une base de $\mathbb{C}$ appelée base canonique de $\mathbb{C}$.

Remarque

Soit E un espace vectoriel réel et $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une base de E.

Si x et y sont deux vecteurs de E tels que $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)_{(B)}$ et $y = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)_{(B)}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$x + y = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)_{(B)}$ et $\lambda.x = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n)_{(B)}$

5) Dimension d'un espace vectoriel réel

Théorème et Définition

Soit E un espace vectoriel réel et $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une base de E, alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments n. Ce nombre n s'appelle la dimension de E et se note dim E.

Exemples

1) On a vu que les vecteurs $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ forment une base $\mathbb{R}^2$. Alors $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

2) On a vu que les vecteurs $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Alors $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

3) On a vu que les matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$.

4) On a vu que les nombres complexes $z_1 = 1$ et $z_2 = i$ forment une base de $\mathbb{C}$. Alors $\dim \mathbb{C} = 2$.

Proposition 1

Soit E un espace vectoriel réel tel que $\dim E = 2$ et $B = (x_1, x_2)$ une base de E.

Soient $u = (a,b)_{(B)}$ et $v = (a',b')_{(B)}$ deux vecteurs de E. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- $B' = (u,v)$ est une base de E.
- $B' = (u,v)$ est génératrice de E.
- $B' = (u,v)$ est libre dans E.
- $Det(u,v) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$.

Exemple

Montrer que les vecteurs $\vec{u}(2,3)$ et $\vec{v}(-1,4)$ forment une base de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$.

Posons $B = (\vec{u}, \vec{v})$ qui est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ constituée de 2 éléments et $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, il suffit de montrer que $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$.

En effet on a : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 3 \times (-1) = 11$ donc $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$ Cqfd.

Proposition 2

Soit E un espace vectoriel réel tel que $\dim E = 3$ et $B = (x_1, x_2, x_3)$ une base de E.

Soient $u = (a,b,c)_{(B)}$, $v = (a',b',c')_{(B)}$ et $w = (a'',b'',c'')_{(B)}$ trois vecteurs de E. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- $B' = (u,v,w)$ est une base de E.

- $B'=(u,v,w)$ est une famille génératrice de E.
- $B'=(u,v,w)$ est une famille libre dans E.
- $Det(u,v,w)=\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \neq 0$.

Remarques

- $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$
- $\begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array}\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a\times\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b\times\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c\times\begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$
- Lorsque $\dim E = 3$ pour montrer qu'une famille constituée de 3 vecteurs de E est une base de E, il suffit de montrer qu'elle est libre en plus si on connait ses composantes dans une autre base il suffit de montrer que le déterminant de ses vecteurs est non nul.

Exemple

Montrer que les vecteurs $\vec{u}(1,-1,2)$, $\vec{v}(3,0,-1)$ et $\vec{w}(0,2,3)$ forment une base de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$.

Posons $B=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ qui est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ à trois éléments et $\dim\mathbb{R}^3=3$, il suffit de montrer que $\det(B)\neq 0$.

En effet, on a $\det(B)=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\times\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 2\times\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

$$=1(0+2)+(9-0)+2(6-0)=2+9+12=23$$

Donc $\det(B)\neq 0$. D'où B est une base de $\mathbb{R}^3$.

IV – Exercices