Exercice 1

On considère dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{ M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1) Montrer que $\mathcal{E}$ est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

2) Montrer que $(\mathcal{E},+)$ est un groupe commutatif.

3) On considère l'application f de $\mathbb{C}$ vers $\mathcal{E}$ telle que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(M_{(a,b)}\right) = a+b+ib$.

a) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C},\times)$ dans $(\mathcal{E},\times)$.

b) En déduire la structure de $(\mathcal{E}^*,\times)$ où $\mathcal{E}^* = \mathcal{E} - \left\{M_{(0,0)}\right\}$

Exercice 2

On pose $\mathcal{E} = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / a \neq 0\right\}$. On définit sur $\mathcal{E}$ la relation T par :

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall (a',b') \in \mathbb{R}^2; (a,b)\mathrm{T}(a',b') = (aa',ab'+b)$

.

1) Vérifier que T est une loi de composition interne sur $\mathcal{E}$.

2) Montrer que $(\mathcal{E},\mathrm{T})$ est un groupe. Est-il abélien ?

3) Soit $\mathbb{H} = \left\{(a,0) / a \in \mathbb{R}^*\right\}$.

a) Montrer que $(\mathbb{H},*)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{E},*)$.

b) Montrer qu'il existe un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(\mathbb{H},*)$.

4) Soit ϕ l'application définie par : $\phi: \begin{array}{l} \mathcal{E} \to \mathbb{R} \\ (a,b) \mapsto a \end{array}$.

a) Montrer que ϕ est un homomorphisme de $(\mathcal{E},*)$ vers $(\mathbb{R}^*,\times)$.

b) Déterminer $\mathcal{F} = \phi^{-1}(\{1\})$.

c) Montrer que $(\mathcal{F},*)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{E},*)$.

d) Montrer que $(\mathcal{F},*)$ est isomorphe à $(\mathbb{R},+)$.

Exercice 3

On considère dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{ M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$$

1) Montrer que $(\mathcal{E},\times)$ est un groupe abélien.

2) On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{G} = \left\{A^n / n \in \mathbb{N}\right\}$ avec $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}$.

b) Soit $\mathbb{H}$ l'ensemble des matrices inverses des matrices de $(\mathcal{G},\times)$.

Montrer que $\mathbb{H} = \left\{\frac{B^n}{n} \in \mathbb{N}\right\}$

où $B = \begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$.

c) Montrer que $\mathbb{H} \cup \mathcal{G}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{E},\times)$

Exercice 4

Soit $(\mathcal{G},*)$ un groupe et $(\mathbb{H},*)$ et $(\mathbb{K},*)$ deux sous-groupes de $(\mathcal{G},*)$.

1) Montrer que $\mathbb{H} \cap \mathbb{K}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{G},*)$.

2) Montrer que $\mathbb{H} \cup \mathbb{K}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{G},*)$ si, et seulement si $\mathbb{H} \subset \mathbb{K}$ ou $\mathbb{K} \subset \mathbb{H}$.

3) Montrer que

$\mathbb{H} \cup \mathbb{K} = \mathcal{G} \Leftrightarrow \mathbb{H} = \mathcal{G}$ ou $\mathbb{K} = \mathcal{G}$.

Exercice 5

Soit $(\mathcal{G},*)$ un groupe ayant pour élément neutre.

1) Soit $a \in \mathcal{G}$ tel que $a \neq e$ et $A = \left\{x \in \mathcal{G} / x*a = a*x\right\}$.

Montrer que $(A,*)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{G},*)$.

2) On considère l'ensemble $\mathcal{Z}(\mathcal{G}) = \left\{a \in \mathcal{G} / \forall x \in \mathcal{G},\ x*a = a*x\right\}$.

Montrer que $(\mathcal{Z}(\mathcal{G}),*)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{G},*)$.

$\mathcal{Z}(\mathcal{G})$ est appelé le centre du groupe $(\mathcal{G},*)$.

Exercice 6

On considère l'ensemble $\mathbb{H}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix} / (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

1) Montrer que $(\mathbb{H},+)$ est un groupe abélien.

2) Montrer que $(\mathbb{H}^*,\times)$ est un groupe abélien.

(Remarquer que $\mathbb{H}^*=\mathbb{H}-\{O_2\}$.

3) On pose $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $J\in\mathbb{H}$.

b) Calculer J^n pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 7

On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x*y=x+y-3xy$.

1) a) Vérifier que

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (1-3x)(1-3y)=1-3(x*y).$$

b) Montrer que $\left(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$ est un groupe commutatif.

2) Montrer que l'application $\varphi:\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}\to\mathbb{R}^*$

$$x\mapsto\varphi(x)=1-3x$$

est un isomorphisme de $\left(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\},*\right)$ sur $(\mathbb{R}^*,\times)$

Exercice 8

Soit $(G,\times)$ un groupe multiplicatif admettant 1 pour élément neutre. On considère l'application :

$$F:\begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array}.$$

1) Montrer que F est un homomorphisme de $(G,\times)$ vers $(G,\times)$ si, et seulement si la loi $\times$ est commutative dans G

2) On suppose que $\forall x\in G,\ x^2=1$ (Rappelons que $x^2=x\times x$).

Montrer que $(G,\times)$ est commutatif.

3) On pose $G=\{1,a,a^{-1},b\}$ avec $a^2\neq1$.

a) Montrer que $b^2=1$.

b) Donner la table du groupe $(G,\times)$.

c) Est-ce que $(G,\times)$ est commutatif ?

d) Montrer que tout formé de 4 éléments est commutatif.

Exercice 9

On munit l'ensemble $I=]0,+\infty[$ de la loi de composition interne $\perp$ définie par :
$\forall(a,b)\in I\times I,\ a\perp b=e^{\ln(a)\times\ln(b)}$.

1) Montrer que la loi $\perp$ est commutative et associative dans I.

2) Montrer que la loi $\perp$ admet un élément neutre e que l'on déterminera.

3) a) Montrer que $(I-\{1\},\perp)$ est un groupe commutatif.

b) Montrer que $]1,+\infty[$ est un sous-groupe de $(I-\{1\},\perp)$.