

Exercice 1

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer u_1 et u_2 .

2) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < 3$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \frac{(1+u_n)(3-u_n)}{2+u_n}$.

c) En déduire que la suite (u_n) est croissante.

d) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{1+u_n}{3-u_n}$.

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{4}{3-u_n} - 1$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} : -1 < v_n < \frac{-2}{3}$.

c) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 5.

d) Exprimer v_n en fonction de n .

4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{3v_n - 1}{v_n + 1}$

b) Exprimer u_n en fonction de n .

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 2

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher telles que :

- U_1 contient 2 boules rouges et une boule verte
- U_2 contient 3 boules rouges et 5 boules vertes

On considère l'expérience aléatoire suivante :

On lance un dé équilibré (non truqué) dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

- ↯ Si on obtient un nombre pair on tire une boule de l'urne U_1
- ↯ Si on obtient un nombre impair on tire une boule de l'urne U_2

Soient I et R les événements suivants :

I : « Le nombre obtenu est impair »

R : « La boule tirée est rouge »

1) Construire un arbre pondéré modélisant l'expérience aléatoire.

2) Montrer que $p(R) = \frac{25}{48}$ et $p(I \cap R) = \frac{3}{16}$.

3) Les événements I et R sont-ils indépendants ? justifier la réponse.

4) Déterminer $p_I(R)$ et montrer que $p_R(I) = \frac{9}{25}$.

Exercice 3

Une urne contient 9 jetons : 4 jetons blancs, 3 jetons rouges et 2 jetons verts. Les jetons sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard et simultanément 3 jetons de l'urne.

On note A l'événement « aucun jeton blanc n'est tiré »

- 1) Calculer $p(A)$
- 2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de jetons blancs restés dans l'urne.
 - a) Déterminer les valeurs prises par X .
 - b) Montrer que $p(X = 3) = \frac{10}{21}$.
 - c) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
 - d) Calculer l'espérance mathématique de X .

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2+x+x \ln x}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et interpréter ce résultat graphiquement.
 - b) Vérifier que $f(x) = \frac{2}{x} + 1 + \ln x$ pour tout $x > 0$.
 - c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat graphiquement.
- 2) a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{x-2}{x^2}$.
 - b) Dresser le tableau de variation de la fonction f .
 - c) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$.
- 3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]0, 2]$.
 - a) Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
 - b) Dresser le tableau de variation de g^{-1} , la fonction réciproque de g .
 - c) Calculer $(g^{-1})'(3)$.
- 4) Construire dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les courbes (C) et (C') et la droite (T) où (C') est la courbe représentative de g^{-1} .
- 5) On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $h(x) = f(x) - x$
 - a) Dresser le tableau de variation de h .
 - b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$ et que $2 < \alpha < 3$.
 - c) Vérifier que $f(\alpha) = \alpha$ et montrer que $\forall x \geq \alpha, f(x) \leq x$.
- 6) On considère la suite numérique (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \alpha$.

b) Montrer que (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

7) a) En utilisant une intégration par partie calculer l'intégrale $K = \int_1^e \ln x dx$.

b) Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.



S. EL JAAFARI

<https://www.dimamath.com>



MATHÉMATIQUES POUR TOUS

