Exercice 1

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif.

On considère l'ensemble $\mathcal{E}=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix} / (a,b)\in\mathbb{R}^2 \ et \ a^2+b^2=1\right\}$.

1) a) Vérifier que $(\forall(a,b,x,y)\in\mathbb{R}^4): M(a,b)\times M(x,y)=M(ax-by,ay+bx)$.

b) En déduire que $\mathcal{E}$ est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

2) On pose $\mathcal{U}=\{z\in\mathbb{C} / |z|=1\}$.

Montrer que $\mathcal{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$.

3) On considère l'application définie par $\begin{array}{rl} f:\mathcal{U} & \to \mathcal{E} \\ a-ib & \mapsto M(a,b)\end{array}$.

a) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathcal{U},\times)$ vers $(\mathcal{E},\times)$.

b) En déduire la structure de $(\mathcal{E},\times)$ en précisant l'inverse de la matrice $M(a,b)$.

4) On pose $A=M\left(\dfrac{-1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. On note $A^{2024}=\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{2024 \ fois}$

a) Montrer que $A^{2024}=A$

b) Déterminer l'inverse de la matrice A^{2024}.

5) On pose $I=M(1,0) \ et \ J=M(0,1)$.

Résoudre dans $\mathcal{E}$ l'équation : $J\times X^3=I$

Exercice 2

Partie A

Soient p et q deux nombres premiers tels que $p\neq q$ et soit r un entier naturel tel que $r\wedge p=1$ et $r\wedge q=1$.

1) a) Montrer que p divise $(r^{p-1}-1)$ et que q divise $(r^{q-1}-1)$.

b) En déduire que p et q divisent $(r^{(p-1)(q-1)}-1)$.

c) Montrer que pq divise $(r^{(p-1)(q-1)}-1)$.

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $2025^{192}\equiv 3\,[221]$ (Remarquer que : $221=13\times17 \ et \ 2025=3^4\times5^2$).

Partie B

On admet que 1013 est premier.

1) Montrer que : $(\forall a\in\mathbb{Z}): a\wedge 1013\Rightarrow a^{2024}\equiv 1\,[1013]$.

2) On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E): x^{2023}\equiv 2\,[1013]$.

Soit x une solution de l'équation (E).

a) Montrer que $x\wedge 1013=1$.

b) Déduire les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{Z}$.

Partie C

On considère la suite numérique (a_n) définie par : $a_n = 2\times 5^n + 7$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1) a) Justifier que pour tout entier naturel n, a_n est impair.

b) Déterminer suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de 5^n par 8.

c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_n \equiv 1\,[8]$.

2) a) Montrer que si $\begin{cases} x \equiv 1\,[8] \\ x \equiv 7\,[125] \end{cases}$, alors : $x \equiv 257\,[1000]$.

b) Montrer que pour tout $n \geq 3$, $a_n \equiv 257\,[1000]$.

c) Déterminer les trois derniers chiffres (chiffres des unités, des dizaines et des centaines) de $(2\times 5^{2020}+7)(2\times 5^{2021}+7)$?

3) a) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$

b) Soit $d = PGCD(a_{2n}, a_{2n+1})$. Montrer que $d \neq 7$.

c) Trouver la valeur de d.

4) Soit p un nombre premier, déterminer la valeur de p pour que a_p soit divisible par p.

Exercice 3

Partie 1

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 + (4-3i)z + 1 - 7i = 0$.

1) a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $3+4i$.

b) En déduire les solutions a et b de l'équation (E) telles que $\mathrm{Re}(b) < \mathrm{Re}(a)$

2) Soit α un argument de a et soit β un argument de b.

a) Donner la forme trigonométrique du nombre complexe $c = 1-7i$ en fonction de α et β.

b) Déterminer sous forme exponentielle en fonction de α et β chacune des solutions de l'équation $(F) : z^4 + (4-3i)z^2 + 1 - 7i = 0$.

Partie 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives a et b. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et soit H l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{2}$. On pose $F = R \circ H$.

1) a) Montrer que l'écriture complexe de la transformation F est $z' = (1+i)z$.

b) Justifier que $F(A) = B$

2) On pose $M_0 = A$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $M_{n+1} = F(M_n)$ et on désigne par z_n l'affixe du point M_n.

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : z_n = (1+i)^n(-1+2i)$.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et isocèle.

b) Déterminer tous les entiers naturels n pour que les points O, A et M_n soient alignés.

c) Montrer qu'il n'existe aucun point M_n appartenant à l'axe des réels.

Exercice 4

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^{-x}$

Soit (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et interpréter ce résultat graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x}$ et en déduire que la courbe (C_g) admet une branche parabolique au voisinage de $-\infty$ dont on précisera la direction.

2) Montrer que pour tout réel x, $g'(x)=(1-x)e^{-x}$ puis dresser le tableau de variation de g .

3) Montrer que pour tout réel x, $g''(x)=(x-2)e^{-x}$ puis étudier la concavité de la courbe (C_g) et déterminer son point d'inflexion.

4) Construire la courbe (C_g) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

5) Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$, on pose : $\mathcal{A}(\lambda)=\int_0^{\lambda} g(x)\,dx$.

a) Vérifier que $(\forall x\in\mathbb{R}): g(x)+2g'(x)+g''(x)=0$, et en déduire qu'une primitive de g est la fonction $G: x\mapsto -2g(x)-g'(x)$.

b) Exprimer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda)$ et donner une interprétation graphique du résultat.

6) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{2n} k\times\sqrt[2n]{e^{-k}}$.

Vérifier que $(\forall n\in\mathbb{N}^*): S_n=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{2n} g\left(\frac{k}{2n}\right)$ et en déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente en précisant sa limite.

Partie 2

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(0)=\frac{1}{2}$ et $F(x)=\frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{g(t)}{1+e^{-t}}dt$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$.

1) a) En utilisant une intégration par changement de variable, montre que :

$$(\forall x\in\mathbb{R}^*);\ \int_0^{-x}\frac{g(t)}{1+e^{-t}}dt=\int_0^x \frac{u}{1+e^{-u}}du$$

b) En déduire que $(\forall x\in\mathbb{R});\ F(-x)=1-F(x)$.

2) a) Vérifier que $(\forall t\in\mathbb{R}^+);\ 0\le g(t)\le e^{-t}$, puis en déduire que $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*);\ 0\le F(x)\le\frac{2e^{-1}}{x}$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$, puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$ en justifiant la réponse.

3) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*);\ F'(x)=\frac{2}{x}\left(\frac{1}{1+e^x}-F(x)\right)$.

4) a) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$, en utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$F(x)=\frac{1}{1+e^x}+\frac{1}{x^2}\int_0^x\left(\frac{t}{1+e^t}\right)^2 e^t\,dt.$$

b) En déduire que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right);\ F'(x)=\dfrac{-2}{x^3}\displaystyle\int_0^x\left(\frac{t}{h(t)}\right)^2 dt$ où $h(t)=e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}$

5) a) Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right);\ \dfrac{x^3}{3\left(h(x)\right)^2}\leq\displaystyle\int_0^x\left(\frac{t}{h(t)}\right)^2 dt\leq\frac{x^3}{12}$.

(Remarque que h est croissante sur $\mathbb{R}_+$)

b) En déduire que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right);\ \dfrac{-1}{6}\leq F'(x)\leq\dfrac{-2}{3\left(h(x)\right)^2}$.

6) a) Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right);\ \dfrac{1}{1+e^x}\leq F(x)\leq\dfrac{1}{1+e^x}+\dfrac{x}{3}$.

(On pourra utiliser le résultat de la question Partie 2/4)a))

b) En déduire que F est continue à droite en 0.

7) Montrer que F est dérivable en 0 et que $F'(0)=\dfrac{-1}{6}$.

(On pourra appliquer le théorème des accroissements finis à F).

8) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $F(x)=nx$ admet une solution unique a_n dans $\mathbb{R}$.

b) Justifier que $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right): a_n>0$.

9) Justifier que la suite $\left(a_n\right)_{n\geq1}$ est convergente, puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

10) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}n\,a_n=\dfrac{1}{2}$ et en déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(n\,a_n-\dfrac{1}{2}\right)$.

S. EL JAAFARI
https://www.dimamath.com
MATHÉMATIQUES POUR TOUS