Tables des matières

S. EL JAAFARI
https://www.dimamath.com
MATHÉMATIQUES POUR TOUS

I – Vecteurs de l'espace – Rappels

1 – Définition

Définition

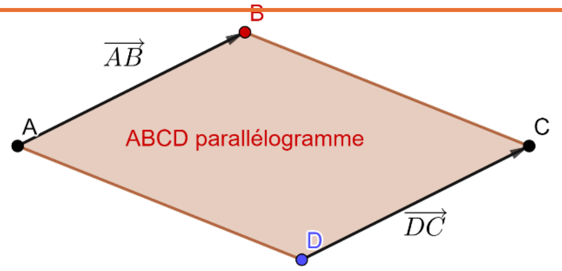
Comme dans le plan, un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini dans l'espace par :

- Sa direction : La droite (AB)
- Son sens : Orienté de A vers B
- Son module : La distance entre A et B

Proposition (Egalité de deux vecteurs)

Si A, B, C et D sont trois points non alignés de l'espace, alors :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow$ ABCD est un parallélogramme



Remarques

- Deux vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont égaux s'ils ont la même direction, le même sens et le même module.
- $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$
- La distance entre les points A et B est notée : $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$
- I milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$

2 – Calcul vectoriel dans l'espace

Définition

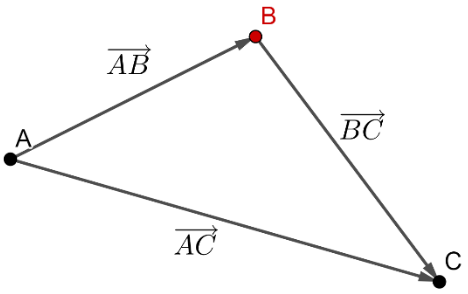
La somme de deux vecteurs et le produit d'un vecteur par un nombre réel sont définis dans l'espace de la même manière que dans le plan et on a :

- $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ pour A et B deux points de l'espace
- Si $\vec{v} = k.\vec{u}$, alors les vecteurs $\vec{v}$ *et* $\vec{u}$ ont la même direction
- Si $\vec{v} = k.\vec{u}$ tel que :
  - $k > 0$, alors les vecteurs $\vec{v}$ *et* $\vec{u}$ ont la même direction et le même sens
  - $k < 0$, alors les vecteurs $\vec{v}$ *et* $\vec{u}$ ont la même direction et des sens opposés
- Si $\vec{v} = k.\vec{u}$, alors $\|\vec{v}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$
- $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (L'inégalité triangulaire)

Proposition 1 (Relation de Chasles)

Si A, B et C sont trois points de l'espace, alors : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Cette propriété s'appelle la relation de Chasles



Proposition 2 (Règle du parallélogramme)

Si A, B, C et D sont quatre points de l'espace, alors :

$$ABCD \text{ est un parallélogramme } \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

Propriétés

Soient $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et α *et* β deux réels. Alors :

- ★ $(\alpha + \beta).\vec{u} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{u}$
- ★ $\alpha.(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha.\vec{u} + \alpha.\vec{v}$
- ★ $\alpha.(\beta.\vec{u}) = \beta.(\alpha.\vec{u}) = (\alpha \times \beta).\vec{u}$
- ★ $1.\vec{u} = \vec{u}$
- ★ $\alpha.\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow [\ \alpha = 0 \ ou\ \vec{u} = \vec{0}\ ]$

3 – Vecteurs colinéaires

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ de l'espace sont dits colinéaires si, et seulement s'ils sont proportionnels entre eux.

Autrement dit : $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R}) : \vec{v} = \lambda.\vec{u}$

Remarque

- Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire avec tous les vecteurs de l'espace.
- Deux vecteurs de l'espace sont colinéaires si et seulement s'ils ont la même direction.

Définition

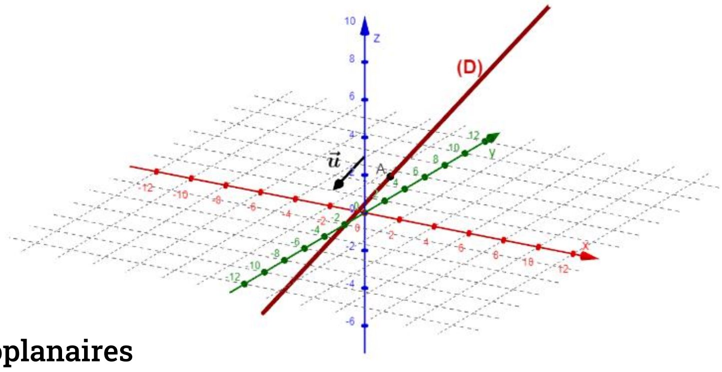
Soient A et B deux points distincts de l'espace.

- Tout vecteur non nul $\vec{u}$ de l'espace colinéaire avec le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est dit un vecteur directeur de la droite (AB).
- L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha.\vec{u}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est la droite qui passe par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ notée $D(A,\vec{u})$.

$$D(A,\vec{u}) = \{M \in \mathcal{E} \ / \ \overrightarrow{AM} = k.\vec{u},\ k \in \mathbb{R}\}$$

Proposition

- ★ Trois points de l'espace A, B et C sont alignés si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- ★ Les droites (AB) *et* (CD) sont parallèles si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



4 – Vecteurs coplanaires

Définition

- Quatre points A, B, C et D de l'espace sont coplanaires s'ils appartiennent à un même plan.
- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ de l'espace sont coplanaires si, et seulement s'il existe un couple de réels (α,β) tel que $\vec{w}=\alpha.\vec{u}+\beta.\vec{v}$

Remarques

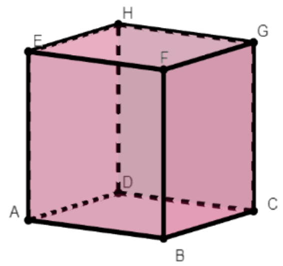
- Deux points sont coplanaires
- Trois points quelconques sont coplanaires
- Deux vecteurs sont coplanaires

Proposition

Soient A, B, C et D quatre points distincts de l'espace.
Les points A, B, C et D sont coplanaires si, et seulement si les vecteurs $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ *et* $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Exemples

ABCDEFGH est un cube.

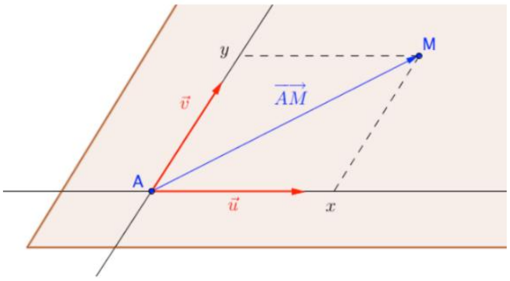


- Les points A, D, H et E sont Coplanaires car ils appartiennent au plan (ADHE)
- Les points A, B, D et H ne sont pas Coplanaires car H n'appartient Pas au plan (ABD)
- Les vecteurs $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AE}$ *et* $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires
- Les vecteurs $\vec{u}=\overrightarrow{AE}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ *et* $\vec{w}=\overrightarrow{AG}$ sont coplanaires.

Définition

- Chaque plan de l'espace est déterminé par la donnée d'un point et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ appelés les vecteurs directeurs den ce plan.
- Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires et A un point donné de l'espace, l'ensemble (P) des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}=x.\vec{u}+y.\vec{v}$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ est le plan passant par le point A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.

$$(P)=P(A;\vec{u},\vec{v})=\left\{M\in\mathcal{E}\ /\ \overrightarrow{AM}=x.\vec{u}+y.\vec{v}\text{ et }(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$



Exemple

Dans l'espace, on considère les points A, B, C, D et M vérifiant la relation

$2\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=\vec{0}$. Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

En effet, en appliquant la relation de Chasles on :

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=\vec{0} &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}+4\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)-5\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)-\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}\right)=\vec{0}\\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\vec{0}\\ &\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\vec{0}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Alors le vecteur $\overrightarrow{AD}$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$, par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires d'où les points A, B,C et D sont coplanaires.

5 – Parallélisme des droites et des plans dans l'espace

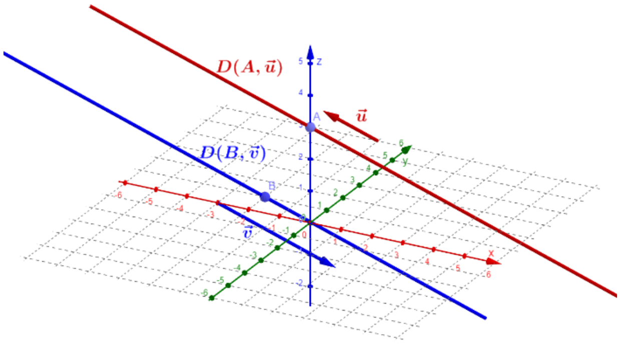
5 – 1 – Parallélisme des droites dans l'espace

Définition

Soient $(D)=D(A,\vec{u})$ *et* $(\Delta)=D(B,\vec{v})$ deux droites de l'espace.

Les droites (D) *et* (Δ) sont parallèles si, et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires

Autrement dit : $(D)//(\Delta)\Leftrightarrow(\exists\alpha\in\mathbb{R}):\vec{v}=\alpha.\vec{u}$



5 – 2 – Parallélisme d'une droite et d'un plan de l'espace

Définition

Soient $(D)=D(A,\vec{w})$ une droite et $(P)=P(B,\vec{u},\vec{v})$ un plan de l'espace.

La droite (D) est parallèle au plan (P) si, et seulement si les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ sont coplanaires.

Autrement dit : $(D)||(P)\Leftrightarrow\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2:\vec{w}=\alpha.\vec{u}+\beta.\vec{v}$

5 – 3 – Parallélisme de deux plans dans l'espace

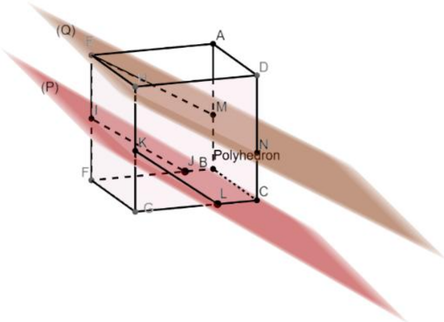
Définition

Soient $(P) = P(A,\vec{u},\vec{v})$ et $(Q) = P(B,\vec{u}',\vec{v}')$ deux plans de l'espace.

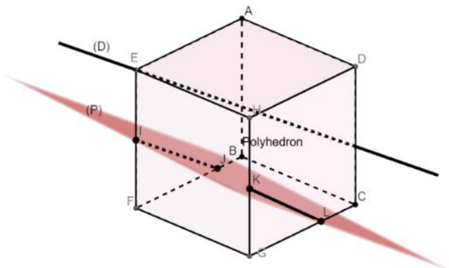
Les plans (P) et (Q) sont parallèles si, et seulement si les quatre vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ sont coplanaires.

Autrement dit ;

$$(P) \parallel (Q) \Leftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \vec{u}' = x.\vec{u} + y.\vec{v} \text{ et } \exists (x',y') \in \mathbb{R}^2 : \vec{v}' = x'.\vec{u} + y'.\vec{v}$$



$(P) /\!/ (Q)$



$(D) /\!/ (P)$

II – Produit scalaire dans l'espace

1 – Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace

Théorème et définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et A, B et C trois points de l'espace tels que :

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Il existe un plan (P) de l'espace contenant les points A, B et C.

Le produit scalaire dans l'espace des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\vec{u}.\vec{v}$ est le produit scalaire dans le plan (P) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

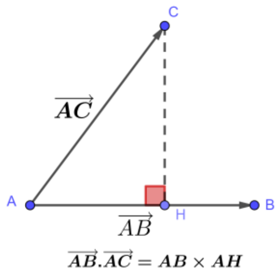
Remarque

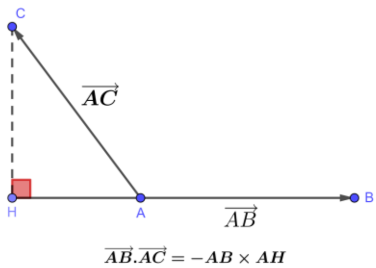
Cette définition est indépendante des représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, donc du plan choisi.

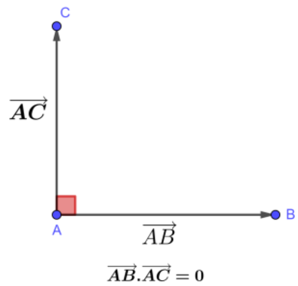
Définitions

Soient A, B et C trois points de l'espace tels que H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $H \in [AB)$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $H \in [AB)$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ si $H = A$.







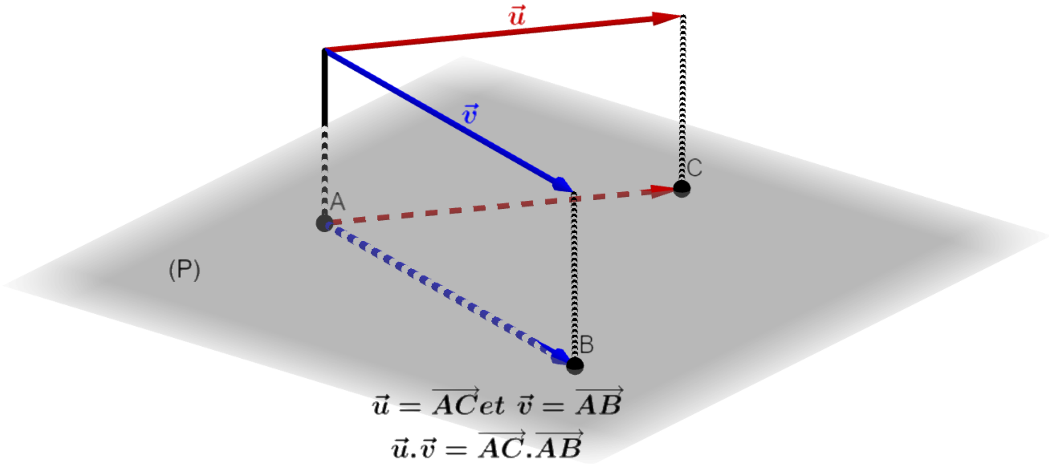
Conséquences

- Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace.

  $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$
- Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires de même sens de l'espace, alors :

  $\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right) \equiv 0[2\pi]$ et $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- **Si** $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires de sens opposés, alors :

  $\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right) \equiv \pi[2\pi]$ et $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ »



Propriétés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors on a :

★ $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

★ $\vec{u}.\left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

★ $\left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

★ $\left(\vec{u} - \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

★ $\left(\vec{u} - \vec{v}\right)\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

2 – Vecteurs orthogonaux

Définition

On dit que deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

On note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Exemples

3 – Norme d'un vecteur

Définition

Soient $\vec{u}$ un vecteur de l'espace et A et B deux points de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

On appelle la norme du vecteur $\vec{u}$ la distance AB. Et on a :

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$
- $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = \vec{u}.\vec{u}$
- $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$

Exemples

Propriétés

Soient $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ trois vecteurs de l'espace et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors on a :

- ★ $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
- ★ $\|\alpha.\vec{u}\| = |\alpha| \times \|\vec{u}\|$
- ★ $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$
- ★ $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
- ★ $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (inégalité triangulaire)
- ★ $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- ★ Si A, B et C sont trois points de l'espace, alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$

4 – Repérage dans l'espace

4 – 1 – Base et repère dans l'espace

Définition

Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$ *et* $\vec{k}$ trois vecteurs de l'espace.

- On dit que la famille $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une base de l'espace si, et seulement si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ *et* $\vec{k}$ sont non coplanaires.
- On dit que $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une base orthonormale de l'espace si, et seulement si :

$$\begin{cases} \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right) \text{est une base de l'espace} \\ \vec{i}.\vec{j} = 0, \vec{i}.\vec{k} = 0, \vec{j}.\vec{k} = 0 \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \end{cases}$$

Définition

Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$ *et* $\vec{k}$ trois vecteurs de l'espace et O un point de l'espace.

- On dit que $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est un repère de l'espace si, et seulement si la famille $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une base de l'espace
- On dit que $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace si, et seulement si :

$$\begin{cases} \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right) \text{est une base de l'espace} \\ \vec{i}.\vec{j} = 0, \vec{i}.\vec{k} = 0, \vec{j}.\vec{k} = 0 \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \end{cases}$$

4 – 2 – Coordonnées dans l'espace

Théorème et définition

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

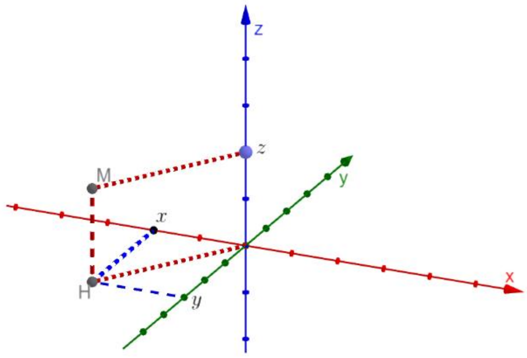
★ Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$.

Le triplet (x, y, z) est appelé les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Où : $x =$ l'abscisse ; $y =$ l'ordonnée et $z =$ la cote du vecteur $\vec{u}$ qu'on note $\vec{u}(x, y, z)$

★ Pour chaque point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

Le triplet (x, y, z) est appelé les coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Où : $x =$ l'abscisse ; $y =$ l'ordonnée et $z =$ la cote du point M qu'on note $M(x, y, z)$.



$M(x, y, z)$

Proposition 1

L'espace est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs de l'espace. Alors :

★ $\vec{u} + \vec{v}(x + x', y + y', z + z')$

★ $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha.\vec{u}(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

★ $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v}(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z')$

Proposition et définition

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $\vec{u}(x, y, z)$; $\vec{v}(x', y', z')$ et $\vec{w}(x'', y'', z'')$ trois vecteurs de l'espace.

★ On appelle le déterminant des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ le nombre réel :

$$Det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \times \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \times \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \times \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

★ Les trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si $Det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

Exemples

- Calculer le déterminant des vecteurs $\vec{u}(2, -1, 0)$; $\vec{v}(3, 1, 1)$; $\vec{w}(0, -2, 2)$
- Les vecteurs $\vec{u}(2, -1, 0)$; $\vec{v}(3, 1, 1)$; $\vec{w}(0, -2, 2)$ sont-ils coplanaires ?

4 – 3 – Représentation paramétrique d'une droite dans l'espace

Proposition

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit (D) la droite passant par le point $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ et de vecteur directeur non nul $\vec{u}(a,b,c)$. Alors la droite (D) admet une représentation paramétrique de la forme :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

Exemples

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point $A(-1,2,0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2,-3,5)$.

Solution

La droite (Δ) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-3t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=+5t \end{cases}$

2) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB), du segment $[AB]$ puis de la demi-droite $[AB)$ sachant que $A(1,1,-1)$ et $B(0,3,2)$.

Solution

Dans tous les cas $\overrightarrow{AB}(-1,2,3)$ est un vecteur directeur de la droite (AB), du segment $[AB]$ et de la demi-droite $[AB)$ et passent tous par le point A. Alors :

$$(AB):\begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=-1+3t \end{cases} ;[AB]:\begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \quad (t\in[0,1]) \\ z=-1+3t \end{cases} ;[AB):\begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \quad (t\in[0,+\infty[) \\ z=-1+3t \end{cases}$$

4 – 4 – Représentation paramétrique d'un plan dans l'espace

Proposition

Soit (P) un plan de l'espace passant par le point $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(a',b',c')$. Alors le plan (P) admet une représentation paramétrique de la forme : $(P):\begin{cases} x=x_A+at+a'k \\ y=y_A+bt+b'k\left((t,k)\in\mathbb{R}^2\right) \\ z=z_A+ct+c'k \end{cases}$

Exemples

1) Déterminer une représentation paramétrique du plan (P) passant par le point $A(-2,1,3)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(2,-1,1)$ et $\vec{v}(3,4,5)$.

Solution

Le plan (P) a pour représentation paramétrique $(P):\begin{cases} x=-2+2t+3k \\ y=1-t+4k \quad \left((t,k)\in\mathbb{R}^2\right) \\ z=3+t+5k \end{cases}$

2) On considère les points $A(1,1,2);\ B(-1,0,3)$ et $C(3,2,-1)$.

a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés

b) Déterminer une représentation du plan (ABC)

Solutions

a) On a $\overrightarrow{AB}(-2,-1,1)$ $\overrightarrow{AC}(2,1,-3)$ puisque $\frac{2}{-2} \neq \frac{3}{1}$ alors les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles d'où les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires par suite les points A, B et C ne sont pas alignés donc ils forment un plan noté (ABC)

b) Le plan (ABC) passe par le point $A(1,1,2)$ et est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}(-2,-1,1)$ $\overrightarrow{AC}(2,1,-3)$ par conséquent une représentation paramétrique du plan (ABC) est : $(ABC);\begin{cases} x = 1-2t+2k \\ y = 1-t+k \\ z = 2+t-3k \end{cases} \quad \left((t,k)\in\mathbb{R}^2\right)$

5 – Expression analytique du produit scalaire dans l'espace

Proposition 1

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit $\vec{u}(x,y,z)$ *et* $\vec{v}(x',y',z')$ deux vecteurs de l'espace.

- ★ Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ est : $\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'+zz'$
- ★ La norme du vecteur $\vec{u}$ est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- ★ Si $A(x_A,y_A,z_A)$ *et* $B(x_B,y_B,z_B)$ sont deux points de l'espace, alors : La distance entre les points A et B est : $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

Exemple

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}(-2,1,3)$ *et* $\vec{v}(0,2,5)$ et les points $E(2,-1,4)$ *et* $F(-1,3,0)$.

Calculer $\vec{u}.\vec{v};\|\vec{u}\|$ *et* EF

Proposition 2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

- ★ La mesure de l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ est donnée par :

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

- ★ $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'+zz' = 0$.

Exemple

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit $\vec{u}(2,-1,1)$ *et* $\vec{v}(0,-2,3)$ deux vecteurs de l'espace.

1) Calculer $\vec{u}.\vec{v};\|\vec{u}\|;\|\vec{v}\|$ *et* $\cos(\vec{u},\vec{v})$

2) Les vecteurs $\vec{u}(2,-1,1)$ *et* $\vec{v}(0,-2,3)$ sont-ils colinéaires ? orthogonaux ?

6 – Ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = k$

Proposition

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit $\vec{u}(a,b,c)$ un vecteur non nul de l'espace et $A(x_A,y_A,z_A)$ un point de l'espace et $k\in\mathbb{R}$.

L'ensemble $\{M \in \mathcal{E} / \vec{u}.\overrightarrow{AM} = k\}$ est un plan de l'espace d'équation cartésienne $a x + b y + c z + d = 0$ où $d = -(a x_A + b y_A + c z_A + k)$

Exemple

Déterminer l'ensemble (P) des points M de l'espace vérifiant la relation $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = 3$ où $A(-1,2,1)$ et $\vec{u}(3,4,5)$.

Solution

$$M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{AM} = 3 \quad \left[\vec{u}(3,4,5) \text{ et } \overrightarrow{AM}(x+1, y-2, z-1)\right]$$
$$\Leftrightarrow 3(x+1)+4(y-2)+5(z-1)=3$$
$$\Leftrightarrow 3x+4y+5z+3-8-5-3=0$$
$$\Leftrightarrow 3x+4y+5z-13=0$$

Alors L'ensemble (P) est le plan de l'espace dont une équation cartésienne est : $3x+4y+5z-13=0$.

7 – Etude analytique des plans et des droites dans l'espace

7 – 1 – Vecteur normal à un plan

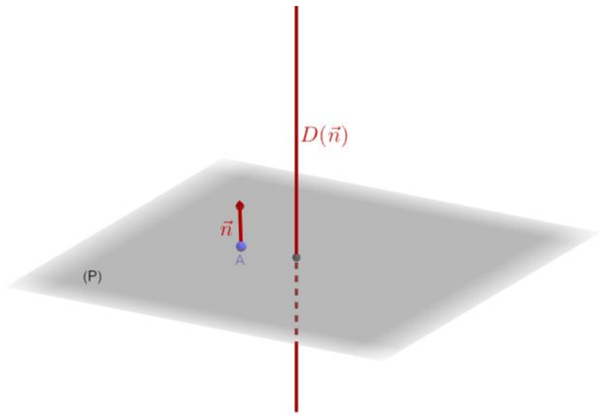
Définition

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace.

Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal à un plan (P) si, et seulement si la direction de $\vec{n}$ est perpendiculaire au plan (P).

Remarques

- Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à un plan (P), alors chaque vecteur colinéaire à $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal au plan (P).
- Chaque plan admet une infinité de vecteurs normaux.
- Si deux vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont normaux à un plan alors les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires



Proposition

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et (P) un plan dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Alors : $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (P) si, et seulement si $\vec{n} \perp \vec{u}$ et $\vec{n} \perp \vec{v}$

7 – 2 – Ensembles des points $M(x,y,z)$ tel que $a x + b y + c z + d = 0$

Proposition

Soient a, b et c trois non nombres réels tels que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.
L'ensemble $(P) = \{M(x,y,z) / ax + by + cz + d = 0\}$ est un plan dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$

Exemple

Déterminer un vecteur normal et un point A par lequel passe le plan $(P): 3x - y + 2z - 1 = 0$.

En effet à partir de l'équation du plan (P) on déduit que le vecteur $\vec{n}(3,-1,2)$ est un vecteur normal au plan (P).

Si on pose $x = 1$ et $z = 2$ on en déduit à partir de l'équation du plan (P) que $y = 6$, d'où le point $A(1,6,2)$ est un point du plan (P).

Méthode :

Pour déterminer les coordonnées d'un point d'un plan $(P): ax + by + cz + d = 0$.

Si $a \neq 0$, on donne à y et à z des valeurs (que l'on veut) et on calcule x.

7 – 3 – Equation cartésienne du plan passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$ où $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

Proposition

Soit (P) le plan passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$ tel que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Alors :

- ★ Une équation cartésienne du plan (P) est $ax + by + cz + d = 0$ où $d = -(ax_A + by_B + cz_A)$
- ★ $(P) = \{M \in \mathcal{E} / \vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0\}$

Exemples

Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par le point $A(-1,2,1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2,-1,3)$.

En effet, une équation du plan (P) est $2x - y + 3z + d = 0$

Et comme $A(-1,2,1) \in (P)$, alors $d = -(2\times -1 - 2 + 3\times 1) = 1$

D'où $(P): 2x - y + 3z + 1 = 0$

8 – Parallélisme et orthogonalités des plans et des droites

8 – 1 – Parallélisme et orthogonalité de deux plans

Proposition

Soient (P_1) et (P_2) deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$. Alors :

- ★ $(P_1) // (P_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ Sont colinéaires
- ★ $(P_1) \perp (P_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0$

Remarque

Deux plans (P_1) et (P_2) ne sont pas parallèles si, et seulement s'ils se coupent en une droite dont un vecteur directeur $\vec{u}$ est défini par : $\begin{cases} \vec{u}.\vec{n}_1 = 0 \\ \vec{u}.\vec{n}_2 = 0 \end{cases}$

Exemple

Etudier le parallélisme et l'orthogonalité des plans (P_1) et (P_2) dans les cas suivants :

a) $(P_1): 2x-y+z+3=0$ et $(P_2): -3x+2y+8z-1=0$

b) $(P_1): x+2z-1=0$ et $(P_2): -3x-6z+1=0$

8 – 2 – Parallélisme et orthogonalité d'une droite et d'un plan

Proposition

Soit (D) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et (P) un plan de vecteur normal $\vec{n}$. Alors :

- ★ $(D) // (P) \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{n}=0$
- ★ $(D) \perp (P) \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires

Exemple

Soit (D) la droite de vecteur directeur $\vec{u}(1,-1,2)$ et $(P): x-y-z=0$. Montrer que $(D) // (P)$.

Solution

Un vecteur normal au plan (P) est $\vec{n}(1,-1,-1)$.

$\vec{n}.\vec{u}=1\times1+(-1)\times(-1)+(-1)\times2=1+1-2=0$. Alors $\vec{n}\perp\vec{u}$, par conséquent $(D) // (P)$.

8 – 3 – Parallélisme et orthogonalité de deux droites

Proposition

Soient (D) et (D') sont deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors :

- ★ $(D) // (D') \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
- ★ $(D) \perp (D') \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0$

Exemple

Soient (D) et (D') sont deux droites de l'espace telles que $(D): \begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \\ z=\quad 2t \end{cases} \; (t\in\mathbb{R})$ et $(D'): \begin{cases} x=-1+2t \\ y=1+t \\ z=2-2t \end{cases} \; (t\in\mathbb{R})$. Montrer que les droites (D) et (D') ne sont ni parallèles ni orthogonales.

Solution

Un vecteur directeur de la droite (D) est $\vec{u}(-1,1,2)$ et celui de la droite (D') est $\vec{v}(2,1,-2)$.

Donc les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas proportionnelles car $\frac{2}{-1}\neq\frac{1}{1}$, par conséquent les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors les droites (D) et (D') ne sont pas parallèles.

Ensuite on a : $\vec{u}.\vec{v}=-1\times2+1\times1+2\times(-2)=-5$ donc $\vec{u}.\vec{v}\neq0$, par suite les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux, alors les droites (D) et (D') ne sont pas orthogonales.

9 – Distance d'un point à un plan

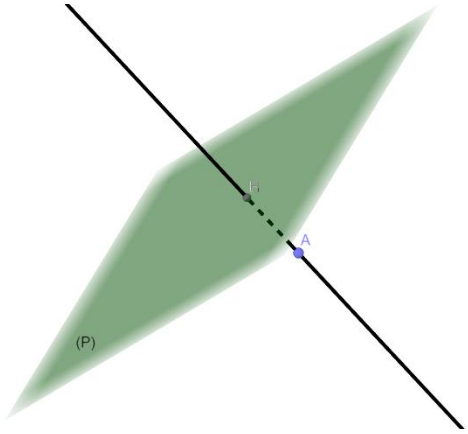
Proposition

Soit (P) un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ où $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ et soit $A(x_A,y_A,z_A)$ un point de l'espace et soit H le projeté orthogonal de A sur le plan (P).

Alors :

- ★ $(AH)\perp(P)$

★ $d\left(A;(P)\right) = AH = \dfrac{\left|ax_A + by_A + cz_A + d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ (la distance du point A au plan (P))



Exemple

Soit (P) le plan d'équation cartésienne $2x - y + z + 1 = 0$ et $A(1,0,1)$. Calculer $d\left(A;(P)\right)$.

Solution

On a : $d\left(A;(P)\right) = \dfrac{\left|2\times1 - 1\times0 + 1\times1 + 1\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

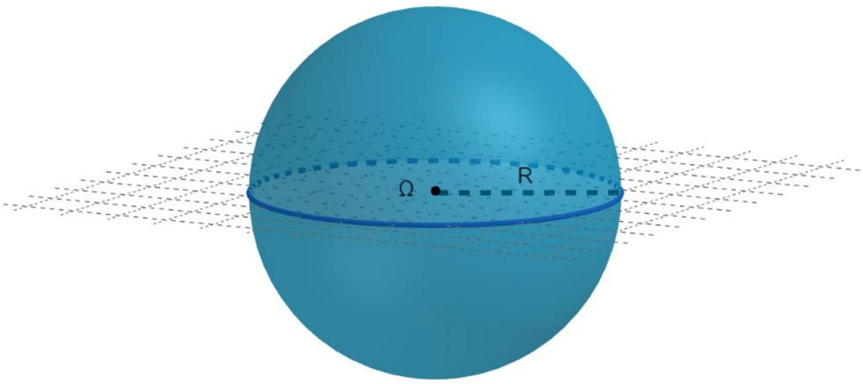
10 – Etude analytique de la sphère

10 – 1 – Définition – Exemples

Définition

Soit Ω un point de l'espace et R un nombre réel positif.

- La sphère $(\mathcal{S})$ de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\Omega M = R$. On la note habituellement $(\mathcal{S}) = \mathcal{S}(\Omega, R)$.
- Si A et B sont deux points de la sphère $(\mathcal{S})$, le segment $[AB]$ est un diamètre de la sphère $(\mathcal{S})$ si, et seulement si le centre Ω est le milieu de $[AB]$.



La sphère $S(\Omega, R)$

10 – 2 – Equation cartésienne d'une sphère définie par son centre et son rayon

Proposition

Soit $\Omega(a,b,c)$ un point de l'espace et R un nombre réel positif.

Une équation cartésienne de la sphère $(\mathcal{S})$ de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R est :

$$(\mathcal{S}) : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Exemple

Déterminer une équation cartésienne de la sphère $(\mathcal{S})$ de centre $\Omega(1,-1,2)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$. Puis préciser si les points $A(2,0,2)$ *et* $B(1,1,1)$ appartiennent à la sphère ou non.

Solution

Une équation de la sphère $(\mathcal{S})$ est : $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=2$

Alors $(\mathcal{S})$: $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+1+1+4-2=0$

D'où $(\mathcal{S})$: $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z++4=0$ est une équation cartésienne de la sphère $(\mathcal{S})$.

En remplaçant dans l'équation de la sphère par les coordonnées du point A, on obtient :

$2^2+0^2+2^2-2\times2+2\times0-4\times2+4=0$, alors $A\in(\mathcal{S})$.

De même en remplaçant par les coordonnées de B, on obtient :

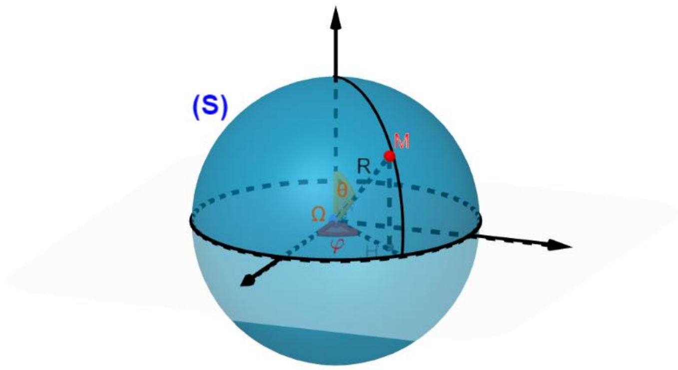
$1^2+1^2+1^2-2\times1+2\times1-4\times1+4=3\neq0$, alors $B\notin(\mathcal{S})$

10 – 3 – Représentation paramétrique d'une sphère

Proposition

Une représentation paramétrique de la sphère $(\mathcal{S})$ de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R est

donnée par le système : $\begin{cases} x=a+R\sin\theta\cos\varphi \\ y=b+R\sin\theta\sin\varphi \quad (\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^2 \\ z=c+R\cos\theta \end{cases}$



10 – 4 – Ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

Proposition

Soit $(\mathcal{S})$ l'ensemble des points $\mathrm{M}(x,y,z)$ de l'espace tels que

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ où $a,\ b,\ c$ *et* d sont des nombres réels. Alors :

- ★ Si $a^2+b^2+c^2+d>0$, alors $(\mathcal{S})$ est la sphère de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d}$.
- ★ Si $a^2+b^2+c^2+d=0$, alors $(\mathcal{S})=\{\Omega(a,b,c)\}$.
- ★ Si $a^2+b^2+c^2+d<0$, alors $(\mathcal{S})=\varnothing$

Exemples

Déterminer la nature de chacun des ensembles suivants :

$(S_1)=\{M(x,y,z)/\ x^2+y\ \ +z^2+2x-4y-2=0\}$

$(S_2)=\{M(x,y,z)/\ x^2+y\ \ +z^2-2x+2y-4z+6=0\}$

$(S_3)=\{M(x,y,z)/\,x^2+y\ \ +z^2+x+6y+2z+11=0\}$

Solution

- $M(x,y,z)\in(S_1) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x-4y-2=0$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2+z^2-1-4-2=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2+z^2=7=\sqrt{7}^2$$

Alors (S_1) est la sphère de centre le point $\Omega(-1,2,0)$ et de rayon $R=\sqrt{7}$

- $M(x,y,z)\in(S_2) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+6=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2-1-1-4+6=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=0$$
$$\Leftrightarrow x=1,\ y=-1\ et\ z=2$$

Alors $(S_2)=\{\Omega(1,-1,2)\}$

- $M(x,y,z)\in(S_3) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+x+6y+2z+11=0$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+3)^2+(z+1)^2-\frac{1}{4}-9-1+11=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=-\frac{3}{4}$$

Comme $-\dfrac{3}{4}<0$, alors $(S_3)=\varnothing$

10 – 5 – Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

Proposition

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(x_A,y_A,z_A)\ et\ B(x_B,y_B,z_B)$.

★ L'ensemble $(S)=\{M\in\mathcal{E}\,/\,\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0\}$ est la sphère de diamètre $[AB]$

★ Une équation cartésienne de la sphère (S) est :

$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$$

Remarque

La sphère de diamètre $[AB]$ est la sphère de centre I milieu de $[AB]$ et de rayon $R=\dfrac{AB}{2}$

Exemple

Déterminer la nature et une équation cartésienne de l'ensemble $(S)=\{M\in\mathcal{E}\,/\,\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0\}$ où $A(1,0,-1)\ et\ B(3,2,1)$

Solution

(S) est la sphère de diamètre $[AB]$ et une équation cartésienne de (S) est :

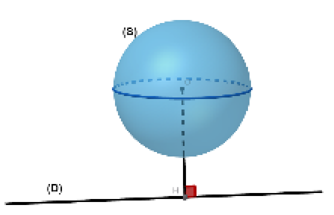
$$(x-1)(x-3)+(y-0)(y-2)+(z+1)(z-1)=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+3+y^2-2y+z^2-1=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-2y+2=0$$

10 – 6 – Intersection d'une sphère et d'une droite

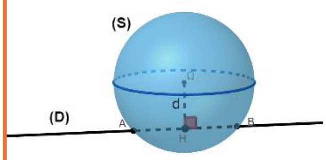
Proposition

Soit (S) la sphère de centre Ω et de rayon R et (D) est une droite. On note H le projeté orthogonal de Ω sur la droite (D) et $d = \mathrm{AH}$.

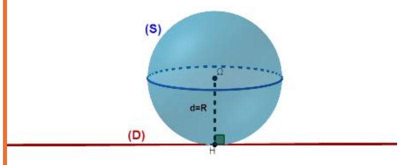
- ★ Si $d > R$, alors la sphère (S) et la droite (D) ne se coupent pas.
- ★ Si $d = R$, alors la sphère (S) et la droite (D) se coupent au point H. La droite (D) est dite tangente à la sphère (S) au point H.
- ★ Si $d < R$, alors la sphère (S) et la droite (D) se coupent en deux points A et B.



Si $d > R \Rightarrow (S)\cap(D) = \varnothing$



Si $d < R \Rightarrow (S)\cap(D) = \{A, B\}$



Si $d = R \Rightarrow (S)\cap(D) = \{H\}$

Exemple

Déterminer l'intersection de la sphère (S) de centre $\Omega(1,-1,1)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$ et la droite $(D) : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = \quad -t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Solution

Une équation cartésienne de la sphère (S) est : $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 3$

Pour déterminer l'intersection de la sphère (S) et la droite (D) on doit résoudre le système

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = \quad -t \\ z = 2 + t \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = \quad -t \\ z = 2 + t \\ (1 - +2t - 1)^2 + (-t+1)^2 + (2+t-1)^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = \quad -t \\ z = 4t^2 + t^2 - 2t + 1 + t^2 + 2t + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = \quad -t \\ z = 2 + t \\ 4t^2 + t^2 - 2t + 1 + t^2 + 2t + 1 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = \quad -t \\ z = 2 + t \\ 6t^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = \quad -t \\ z = 2 + t \\ t = \pm \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

Alors la sphère (S) et la droite (D) se coupent en deux point

$$A\left(-1 + \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, 2 + \frac{\sqrt{6}}{6}\right) \; et \; B\left(-1 - \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, 2 - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

Remarque

On utilise cette méthode souvent pour déterminer les points d'intersection d'une sphère avec une droite.

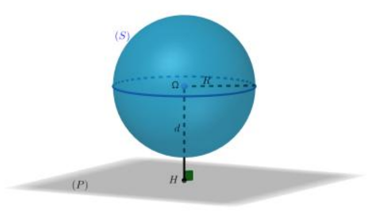
10 – 7 – Intersection d'une sphère et d'un plan

Proposition

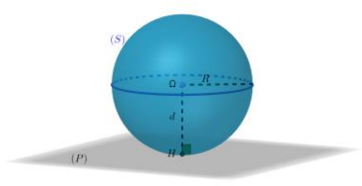
Soit (S) la sphère de centre Ω et de rayon R et (P) un plan de l'espace.

On note $d = d(\Omega,(P))$ la distance de Ω au plan (P) et H le projeté orthogonal de Ω sur le plan (P).

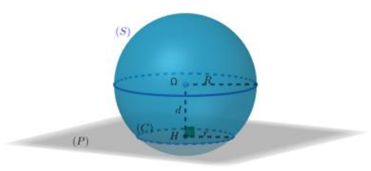
- ★ Si $d > R$, alors $(S)\cap(P) = \varnothing$
- ★ Si $d = R$, alors $(S)\cap(P) = \{H\}$. On dit que le plan (P) est tangent à la sphère (S) au point H.
- ★ Si $d < R$, alors $(S)\cap(P) = (C)$ où $d = d(A,(P)) = \dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ est le cercle de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$



$d > R \Rightarrow (S)\cap(P) = \varnothing$



$d = R \Rightarrow (S)\cap(P) = \{H\}$



$d < R \Rightarrow (S)\cap(P) = (C)(H,r)$

Remarque

Il est utile de rappeler que si $(P): ax + by + cz + d = 0$ est un plan de l'espace et que $A(x_A, y_A, z_A)$ est un point, alors $d = d(A,(P)) = \dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Exemple

On considère la sphère (S) de centre $\Omega(1,-1,1)$ et de rayon $R = \sqrt{6}$ et le plan $(P): 2x - y + z - 1 = 0$.

Déterminer l'intersection de la sphère (S) et du plan (P).

Solution

On a $d = d(\Omega,(P)) = \dfrac{|2\times1+1+1-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ et $R = \sqrt{6}$

Donc $d < R$. Par conséquent la sphère (S) et le plan (P) se coupent selon un cercle (C) de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{6 - \dfrac{6}{4}} = \sqrt{\dfrac{18}{4}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Déterminons les coordonnées du point H centre du cercle (C).

Soit (D) la droite passant par $\Omega(1,-1,1)$ et perpendiculaire au plan (P), donc un vecteur directeur de la droite (D) et le vecteur normal au plan (P), $\vec{n}(2,-1,1)$, par suite un représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-t \ (t\in\mathbb{R}) \\ z=1+t \end{cases}$$

Résolvons le système $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-t \\ z=1+t \\ 2x-y+z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-t \\ z=1+t \\ 2(1+2t)-(-1-t)+1+t-1=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-t \\ z=1+t \\ 4t+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-t \\ z=1+t \\ t=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Alors le cercle (C) a pour rayon $r=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ et son centre est le point $H\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

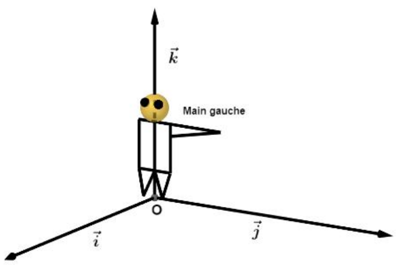
III – Produit vectoriel dans l'espace

1 – Orientation de l'espace

Définition

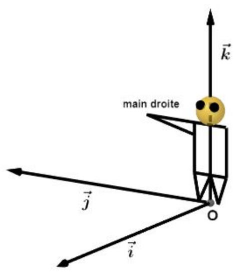
L'espace est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère un observateur appelé « bonhomme d'Ampère » qui est debout sur l'axe dirigé par le vecteur $\vec{k}$ au point O

1[er] cas :
Si le bonhomme d'Ampère regarde dans le même sens que le vecteur $\vec{i}$ en laissant le vecteur $\vec{j}$ à sa gauche, alors on dira que le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est direct



Le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est direct

2[ème] cas :
Si le bonhomme d'Ampère regarde dans le même sens que le vecteur $\vec{i}$ en laissant le vecteur $\vec{j}$ à sa droite, alors on dira que le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est indirect



Le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est indirect

Remarque

On dit que l'espace est orienté positivement lorsqu'il est muni d'un repère direct

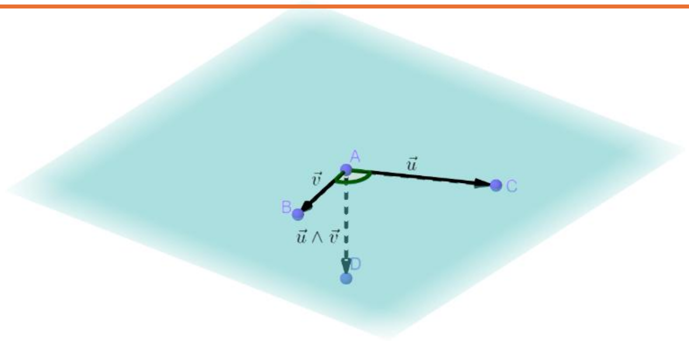
2 – Définition – Exemples

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors :
  - $\vec{u} \perp (\vec{u} \wedge \vec{v})$ et $\vec{v} \perp (\vec{u} \wedge \vec{v})$
  - La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe de l'espace
  - $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\overline{\vec{u}, \vec{v}})$



Remarque

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace, alors il existe trois points A, B et C de l'espace non alignés tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, et définissent un plan de l'espace noté (ABC) qui a pour vecteur normal le vecteur $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

3 – Propriétés

Propriétés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- ★ $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0}$
- ★ $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$ (le produit vectoriel est antisymétrique)
- ★ $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$; $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$;
  $\vec{u} \wedge (\lambda\vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$ (Le produit vectoriel est bilinéaire)

4 – Expression analytique du produit vectoriel

Proposition

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(a',b',c')$ deux vecteurs. Alors :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{a'} \\ b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} .\vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ \cancel{b} & \cancel{b'} \\ c & c' \end{vmatrix} .\vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \\ \cancel{c} & \cancel{c'} \end{vmatrix} .\vec{k}$$

$$= (bc' - cb').\vec{i} - (ac' - ca').\vec{j} + (ab' - ba').\vec{k}$$

Exemples

Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans chacun des cas suivants :

1) $\vec{u}(1,2,3)$ et $\vec{v}(-1,0,1)$

2) $\vec{u}(0,1,-2)$ et $\vec{v}(1,2,0)$

3) $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ et $\vec{v} = 3\vec{j} - \vec{k}$

Solutions

1) On a $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}.\vec{k} = 2.\vec{i} - (1+3).\vec{j} + 2.\vec{k} = 2.\vec{i} - 4.\vec{j} + 2.\vec{k}$

Donc $\vec{u} \wedge \vec{v}(2,-4,2)$

2) On a $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}.\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}.\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.\vec{k} = 4.\vec{i} - 2.\vec{j} - \vec{k}$

Donc $\vec{u} \wedge \vec{v}(4,-2,-1)$

3) On a $\vec{u}(2,1,-3)$ et $\vec{v}(0,3,-1)$

Donc $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}.\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}.\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}.\vec{k} = (-1+9).\vec{i} + 2.\vec{j} + 6.\vec{k} = 8.\vec{i} + 2.\vec{j} + 6.\vec{k}$

D'où $\vec{u} \wedge \vec{v}(8,2,6)$

5 – Applications

5 – 1 – Alignement de 3 points

Proposition

Soient A , B , C et D trois points de l'espace.

- ★ Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$
- ★ Les points A, B et C forment un plan si, et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$
- ★ Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme si, et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{DC} = \vec{0}$
- ★ L'aire du triangle ABC est $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$
- ★ Si ABCD est un parallélogramme, alors $\mathcal{A}(ABCD) = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$

Exemples

1) Les points $A(1,1,-1)$; $B(0,-1,1)$ et $C(2,0,1)$ sont-ils alignés ? Sinon calculer l'aire du triangle ABC.

Solution

On a $\overrightarrow{AB}(-1,-2,2)$ et $\overrightarrow{AC}(1,-1,12)$

Et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}.\vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}.\vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}.\vec{k} = -2.\vec{i} + 4.\vec{j} + 3.\vec{k}$

Donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, par conséquent les points A, B et C ne sont pas alignés

D'où $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$

2) On considère les points $E(1,1,1); F(2,-1,0); G(-1,0,1)$ et $H(-2,2,-2)$.

Montrer que le quadrilatère EFGH est un parallélogramme et calculer sa surface

Solution

On a $\overrightarrow{EF}(1,-2,-1)$ et $\overrightarrow{HG}(1,-2,-1)$ donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$, par conséquent le quadrilatère EFGH est un parallélogramme et on a $\mathcal{A}(EFGH) = \left\|\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{EH}\right\|$

Puisque $\overrightarrow{EF}(1,-2,-1)$ et $\overrightarrow{EH}(-3,1,-3)$, alors

$\overrightarrow{EF}\wedge\overrightarrow{EH}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & -3\end{vmatrix}.\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -3\\ -1 & -3\end{vmatrix}.\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & -3\\ -2 & 1\end{vmatrix}.\vec{k}=7.\vec{i}+6.\vec{j}-5.\vec{k}$, donc

$\overrightarrow{EF}\wedge\overrightarrow{EH}(7,6,-5)$ d'où $\mathcal{A}(EFGH)=\left\|\overrightarrow{EF}\wedge\overrightarrow{EH}\right\|=\sqrt{7^2+6^2+(-5)^2}=\sqrt{110}$

5 – 2 – Equation d'un plan passant par trois points non alignés

Proposition

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace, alors :

- ★ Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
- ★ Une équation cartésienne du plan (ABC) est déterminée par l'équivalence :

$$M(x,y,z)\in(ABC)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$$

Exemple

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1,0,1)$, $B(2,1,0)$ et $C(-1,1,1)$.

a) Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

c) Les points $D(0,-1,2)$ et $E(11,-1,-3)$ appartiennent-ils au plan (ABC) ?

d) Calculer la surface du triangle ABC.

Solutions

a) On a $\overrightarrow{AB}(1,1,-1)$ et $\overrightarrow{AC}(-2,1,0)$

Donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}.\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{vmatrix}.\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}.\vec{k}=\vec{i}+2.\vec{j}+3.\vec{k}$

Donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$, par conséquent les points A, B et C ne sont pas alignés et ils définissent un plan (ABC).

b) On a $M(x,y,z)\in(ABC)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0\Leftrightarrow1(x-1)+2(y-0)+3(z-1)=0$

$$\Leftrightarrow x+2y+3z-4=0$$

D'où $(ABC):\ x+2y+3z-4=0$

c) $d(D,(ABC))=\dfrac{|0-2+6-4|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=0$ donc $D\in(ABC)$

et $d(E,(ABC))=\dfrac{|11-2+-9-4|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{14}}$ donc $d(E,(ABC))\neq0$ d'où $E\notin(ABC)$

d) On a $\mathcal{A}(ABC)=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\dfrac{1}{2}\sqrt{14}$

5 – 3 – Intersection de deux plans

Proposition

Soient (P) et (Q) deux plans tels que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (P) et $\vec{m}$ est un vecteur normal au plan (Q). Alors :

- ★ Si $\vec{n}\wedge\vec{m}=\vec{0}$, alors (P) et (Q) sont confondus ou strictement parallèles

★ Si $\vec{n} \wedge \vec{m} \neq \vec{0}$, alors (P) et (Q) se coupent selon une droite dirigée par le vecteur $\vec{n} \wedge \vec{m}$

Exemple

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère les plans (P) et (Q) tels que $(P): x-2y+z+1=0$ et $(Q): -2x+y+5=0$

Montrer que les plans (P) et (Q) se coupent selon une droite (Δ) dont on donnera une représentation paramétrique.

Solution

Un vecteur normal au plan (P) est $\vec{n}(1,-2,1)$ et un vecteur normal au plan (Q) est $\vec{m}(-2,1,0)$.

Et on a : $\vec{n} \wedge \vec{m} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}.\vec{k} = -\vec{i} - 2.\vec{j} - 3.\vec{k}$

Donc $\vec{n} \wedge \vec{m} \neq \vec{0}$ par conséquent les plans (P) et (Q) se coupent selon une droite (Δ) dont un vecteur directeur est $\vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{m}$ et on a $\vec{u}(-1,-2,-3)$

Déterminons un point de la droite (Δ), pour cela trouvons un triplet (x, y, z) solution du système $\begin{cases} x-2y+z+1=0 \\ -2x+y+5=0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} x-2y+z+1=0 \\ -2x+y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-5 \\ x-2(2x-5)+z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-5 \\ z=3x-11 \end{cases}$$

En posant $x=0$ alors $y=-5$ et $z=-11$. Donc un point de la droite (Δ) est $A(0,-5,-11)$.

Alors $(\Delta): \begin{cases} x = \quad -t \\ y=-5-2t \\ z=-11-3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

5 – 4 – Distance d'un point à une droite

Proposition

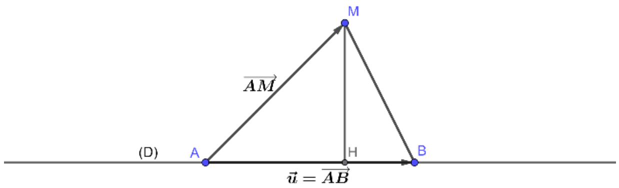
L'espace est rapporté à un repère orthonormé.

Soit (D) une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Et soit M un point de l'espace. La distance du point M à la droite (D) est $d(M,(D)) = \dfrac{\left\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right\|}{\|\vec{u}\|}$

Remarque

En calculant l'aire du triangle ABC de deux Manières on a :

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\left\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right\| = \frac{1}{2} MH \times AB$$



Donc $MH = \dfrac{\left\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right\|}{\|\vec{u}\|} = d(M,(D))$

Exemple

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère la droite

$(D):\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+2t \\ z = \quad -3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ et $E(3,0,-1)$ un point de l'espace. Calculer $d(E,(D))$.

Solution

La droite (D) passe par le point $A(1,-1,0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1,2,-3)$, alors

$$\vec{u} \wedge \overrightarrow{AE} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} .\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} .\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} .\vec{k} = \vec{i} - 5.\vec{j} - 3.\vec{k}$$

D'où $d(E,(D)) = \dfrac{\left\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AE}\right\|}{\|\vec{u}\|} = \dfrac{\sqrt{1^2+(-5)^2+(-3)^2}}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}} = \dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{14}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.