المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵓⵏⵏⵓⴳⴷⴰ

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

المسالك الدولية

الدورة العادية 2016

-الموضوع-

SSSSSSSSS-SS	NS 25

المادة	الرياضيـــــــــــــــات		مدة الإنجاز	4 ساعات
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) - (الترجمة الفرنسية)		المعامل	9

- ✓ **La durée de l'épreuve est de 4 heures**
- ✓ **L'épreuve comporte quatre exercices indépendants**
- ✓ **Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat**

Exercice 1	**Les structures algébriques**	**3,5 points**
Exercice 2	**L'arithmétique**	**3 points**
Exercice 3	**Les nombres complexes**	**3,5 points**
Exercice 4	**L'analyse 1**	**7 points**
Exercice 5	**L'analyse 2**	**3 points**

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

Exercice 1 : (3,5 points)

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont l'unité est la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on pose $M(x,y)=\begin{pmatrix}x+y&0&-2y\\0&0&0\\y&0&x-y\end{pmatrix}$ et

$E=\left\{M(x,y)\,/\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

0,5 1) Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});+)$

0,5 2) Vérifier que :

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\left(\forall(x',y')\in\mathbb{R}^2\right);\ M(x,y)\times M(x',y')=M(xx'-yy',xy'+yx')$$

3) On pose $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$ et on considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers E définie par : $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right);\ \varphi(x+iy)=M(x,y)$

0,25 a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E,\times)$

0,75 b) En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif et que son élément neutre est $M(1,0)$

0,5 4) Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif

5) On pose $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$

0 ,5 a) Calculer $A\times M(x,y)$ pour tout $M(x,y)\in E$

0,5 b) En déduire qu'aucun élément de E n'admet de symétrique dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$

Exercice 2 : (3 points)

Partie I :

Soit (a,b) dans $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ tel que le nombre 173 divise a^3+b^3.

0,25 1) Montrer que : $a^{171}\equiv -b^{171}\ [173]$ (remarquer que : $171=3\times57$)

0,25 2) Montrer que : 173 divise a si et seulement si 173 divise b.

0,25	3) On suppose que 173 divise a. Montrer que 173 divise $a+b$
	4) On suppose que 173 ne divise pas a
0,5	a) En utilisant le théorème de Fermat, Montrer que : $a^{172} \equiv b^{172}\ [173]$
0,5	b) Montrer que : $a^{171}(a+b) \equiv 0\ [173]$
0,5	c) En déduire que 173 divise $a+b$
	Partie II :
	On considère, dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, l'équation $(E): x^3+y^3=173(xy+1)$
	Soit (x,y) un élément de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ solution de l'équation (E).
	On pose : $x+y=173k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$
0,25	1) Vérifier que : $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$
0,5	2) Montrer que $k=1$, puis résoudre l'équation (E).

	<u>Exercice 3</u> : (3,5 points)
	Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
	On considère les points M_1 *et* M_2 du plan complexe tels que les points O, M_1 *et* M_2 Sont distincts deux à deux et non alignés.
	Soient z_1 *et* z_2 les affixes respectives de M_1 *et* M_2 et soit M le point dont l'affixe z Vérifie la relation : $z=\dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$
0,5	1) a) Montrer que : $\dfrac{z_1-z}{z_2-z} \times \dfrac{z_2}{z_1}=-1$
0,5	b) En déduire que le point M appartient au cercle circonscrit au triangle OM_1M_2
0,5	2) Montrer que si $z_2=\overline{z_1}$, alors M appartient à l'axe des réels
	3) On suppose que M_2 est l'image de M_1 par la rotation de centre O et de mesure d'angle α où α est un réel de l'intervalle $]0,\pi[$
0,5	a) Calculer z_2 en fonction de z_1 et de α
0,5	b) Montrer que le point M appartient à la médiatrice du segment $[M_1M_2]$

4) Soit θ un réel donné de l'intervalle $]0,\pi[$.

On suppose que z_1 et z_2 sont les deux solutions de l'équation :

$$6t^2-\left(e^{i\theta}+1\right)t+\left(e^{i\theta}-1\right)=0$$

0,5 a) Sans calculer z_1 et z_2, vérifier que : $z=2\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$

0,5 b) Donner en fonction de θ, la forme trigonométrique du nombre complexe z

<u>Exercice 4</u> : (7 points)

Partie I :

0,5 1) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction : $t\mapsto e^{-t}$,

Montrer que pour tout réel strictement positif x, il existe un réel θ compris

Entre 0 et x tel que : $e^{\theta}=\dfrac{x}{1-e^{-x}}$

2) En déduire que :

0,25 a) $(\forall x>0),\ 1-x<e^{-x}$

0,25 b) $(\forall x>0),\ x+1<e^{x}$

0,25 c) $(\forall x>0),\ 0<\ln\left(\dfrac{xe^{x}}{e^{x}-1}\right)<x$

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}\ si\ x>0\quad et\quad f(0)=1$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

0,5 1) a) Montrer que la fonction f est continue à droite en 0

0,5 b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$, puis interpréter graphiquement le résultat

0,25 2) a) Montrer que : $(\forall x>0),\ x-\dfrac{x^2}{2}<-e^{-x}-1$.

(on pourra utiliser le résultat de la question 2)a) de la partie I)

0,5 b) En déduire que : $(\forall x>0),\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}<e^{-x}+x-1<\dfrac{x^2}{2}$

0,5 3) a) Vérifier que : $\left(\forall x>0\right),\ \dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{e^{-x}+x-1}{x^2}\times f(x)$

0,75 b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{1}{2}$, puis interpréter le résultat obtenu

0,75 4) a) Montrer que f est dérivable en tout point de l'intervalle $]0,+\infty[$, et que :

$$\left(\forall x>0\right),\ f'(x)=\frac{e^x\left(e^x-1-x\right)}{\left(e^x-1\right)^2}$$

0,5 b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

(On pourra utiliser le résultat de la question 2)b) de la partie I)

Partie III :

On considère la suite numérique $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0>0 \ et\ u_{n+1}=\ln\left(f\left(u_n\right)\right)\ pour\ tout\ n\in\mathbb{N}$$

0,5 1) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),\ u_n>0$

0,5 2) Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle

Est convergente

0,5 3) Montrer que 0 est l'unique solution de l'équation : $\ln\left(f(x)\right)=x$, puis déterminer

La limite de la suite $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$.

<u>Exercice 5</u> : (3 points)

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $I=]0,+\infty[$ par :

$$F(x)=\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}\,dt$$

0,5 1) a) Etudier le signe de $F(x)$ pour tout x de I

0,5 b) Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle I et calculer $F'(x)$

pour tout x de I

0,25 c) Montrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle I

0,5 2) a) en utilisant la technique de changement de variable et en posant $u=\sqrt{e^t-1}$,

Montrer que pour tout x de I on a : $\displaystyle\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}\,dt=2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)-\frac{\pi}{2}$

0,5	b) Calculer $\lim_{x \to 0^+} F(x)$ *et* $\lim_{x \to +\infty} F(x)$
0,25	3) a) Montrer que la fonction F est une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle J que l'on déterminera
0,5	b) Déterminer F^{-1} la bijection réciproque de F .

FIN