

[illegible]

المادة	الرياضيات
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)

مدة الإنجاز	4 ساعات
المعامل	9

- ✓ La durée de l'épreuve est de 4 heures
- ✓ L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux
- ✓ Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat

Exercice 1	L'analyse	12 points
Exercice 2	Les nombres complexes	4 points
Exercice 3	L'arithmétique	4 points

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
L'usage de la couleur rouge est à éviter

Exercice 1 : (12 points)

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = -\frac{2e^x}{1+e^x} + nx$$

Soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$)

Partie I :

0,5 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - nx + 2)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu

0,5 b) Montrer que la courbe (C_n) admet, en $-\infty$, une asymptote (Δ_n) dont on déterminera une équation cartésienne.

0,5 2) a) Montrer que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}), f'_n(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n$$

0,5 b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}), \frac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1$

0,5 c) En déduire le sens de variation de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$

(On distinguera les deux cas : $n = 0$ et $n \geq 1$)

0,5 3) a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe (C_n) au point I d'abscisse 0.

0,5 b) Montrer que le point I est le seul point d'inflexion de la courbe (C_n)

0,5 4) Représenter graphiquement dans le même repère, les deux courbes (C_0) et (C_2)

5) Pour tout réel $t > 0$, on pose $A(t)$ l'aire du domaine plan limité par (C_n) et les

Droites d'équations respectives : $y = nx - 2$, $x = 0$ et $x = t$

0,5 a) Calculer $A(t)$ pour tout $t > 0$

0,5 b) Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t)$

Partie II :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = f_0(u_n)$$

0,5 1) a) Montrer que l'équation $f_0(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

0,5 b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}), |f_0'(x)| \leq \frac{1}{2}$

0,5 2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

0,5 b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}), |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$

0,5 c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers α

Partie III :

On suppose dans cette partie que $n \geq 2$.

0,5 1) a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique réel x_n solution de
 L'équation $f_n(x) = 0$.

0,5 b) Montrer que pour tout $n \geq 2, 0 < x_n < 1$

(On prendra $\frac{2e}{1+e} < 1,47$)

0,5 2) a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2, f_{n+1}(x_n) > 0$

0,5 b) En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante.

0,5 c) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est convergente.

0,5 3) a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2, \frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n} \left(\frac{2e}{1+e} \right)$

0,5 b) En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, puis montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n x_n = 1$

0,5 4) a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $x_n \leq x_2$

0,5 b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)^n$.

Exercice 2 : (4 points)

Soient a, b et c trois nombres complexes non nuls tel que : $a + b \neq c$

0,5 1) a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E): z^2 - (a + b + c)z + c(a + b) = 0$$

- 0,5 b) On suppose, dans cette question, que : $a = i$, $b = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c = a - b$.
 Ecrire les deux solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.
- 2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
 On considère les trois points non alignés A, B et C d'affixes respectives a , b et c .
 Soient $P(p)$ le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme B en A, et $Q(q)$ le
 Centre de la rotation d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme C en A et $D(d)$ le milieu du
 Segment $[BC]$.
- 1 a) Montrer que : $2p = b + a + (a - b)i$ et $2q = c + a + (c - a)i$
- 0,5 b) Calculer $\frac{p - d}{q - d}$
- 0,5 c) En déduire la nature du triangle PDQ .
- 3) Soient E le symétrique de B par rapport à P, et F le symétrique de C par rapport à
 Q et K le milieu du segment $[EF]$.
- 0,5 a) Montrer que l'affixe de K est $k = a + \frac{i}{2}(c - b)$
- 0,5 b) Montrer que les points K, P, Q et D sont cocycliques.

Exercice 3 : (4 points)

Partie I :

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation $(E): 47x - 43y = 1$.

- 0,25 1) Vérifier que le couple $(11, 12)$ est une solution particulière de l'équation (E)
- 0,75 2) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) .

Partie II :

On considère dans $\mathbb{Z}$, l'équation $(F): x^{41} \equiv 4 [43]$.

- 1) Soit $x \in \mathbb{Z}$ une solution de l'équation (F) .

0,5 a) Montrer que x et 43 sont premiers entre eux et en déduire que : $x^{42} \equiv 1 [43]$

0,5 b) Montrer que : $4x \equiv 1 [43]$ et en déduire que : $x \equiv 11 [43]$

0,5 2) Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (F) .

Partie III :

On considère dans $\mathbb{Z}$ le système à deux équations suivant $(S): \begin{cases} x^{41} \equiv 4 [43] \\ x^{47} \equiv 10 [47] \end{cases}$

1) Soit x une solution du système (S) .

0,5 a) Montrer que x est solution du système $(S'): \begin{cases} x \equiv 11 [43] \\ x \equiv 10 [47] \end{cases}$

0,5 b) En déduire que : $x \equiv 527 [2021]$ (On pourra utiliser la partie I)

0,5 2) Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ du système (S) .

FIN