Corrigé de l'épreuve des mathématiques
Session normale 2025
biof : PC - SVT

Par : S. EL JAAFARI

15/06/2025

Exercice 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0,0,2)$ et $B(2,0,0)$ et la sphère (S) de centre O et de rayon $R = 2$.

1. a. Déterminer l'équation cartésienne de la sphère (S).

   L'équation cartésienne de la sphère (S) de centre $O(0,0,0)$ et de rayon $R = 2$ est :
   $(S) : (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 2^2$, donc $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$.

   b. Vérifier que les points A et B appartiennent à la sphère (S).

   On a $A(0,0,2)$ et $x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - 4 = 0 + 0 + 4 - 4 = 0$, alors $A \in (S)$
   et on a $B(2,0,0)$ et $x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 - 4 = 4 + 0 + 0 - 4 = 0$, alors $B \in (S)$.

2. Soit I le milieu du segment $[AB]$.

   a. Déterminer l'intersection du plan (OAB) avec la sphère (S).

   A et B sont deux points de la sphère (S) de centre O et de rayon $R = 2$, donc l'intersection du plan (OAB) et la sphère (S) est le cercle de centre O et de rayon $R = 2$ qui passe par les points A et B.

   b. Vérifier que $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ puis montrer que $d\Big(O, (AB)\Big) = \sqrt{2}$

   I est le milieu du segment $[AB]$ donc $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$, d'où $I(1,0,1)$ et $\overrightarrow{OI}(1,0,1)$

   et on a :$\overrightarrow{AB}\Big(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\Big)$,donc $\overrightarrow{AB}(2,0,-2)$,

   alors : $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 2 + 0 \times 0 + 1 \times (-2) = 2 - 2 = 0$, d'où $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, par conséquent $(OI) \perp (AB)$, donc $d\Big(O, (AB)\Big) = OI = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

3. On considère un point $M(0, m, 0)$ de l'espace où $m \in \mathbb{R}$.

   a. Vérifier que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = 2m\vec{i} + 4\vec{j} + 2m\vec{k}$

   On a $\overrightarrow{AB}(2,0,-2)$ et $\overrightarrow{AM}(0-0, m-0, 0-2)$ donc $\overrightarrow{AM}(0, m, -2)$.

   $$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & m & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ m & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} \vec{k} = 2m\vec{i} + 4\vec{j} + 2m\vec{k}.$$

   b. Déduire que $mx + 2y + mz - 2m = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABM).

   On a montré à la question 3.b. que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}(2m, 4, 2m)$ et en posant $\vec{n} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}$ alors $\vec{n}(m, 2, m)$ est un vecteur normal au plan (ABM). Donc une équation cartésienne du plan (ABM) est : $mx + 2y + mz + c = 0$ et comme $A(0,0,2) \in (ABM)$ alors $2m + c = 0$ donc $c = -2m$. Par conséquent $mx + 2y + mz - 2m = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABM).

c. Montrer que $d\Big(O,(ABM)\Big) = \frac{2|m|}{\sqrt{4+2m^2}}$.

On a $d(O,(ABM)) = \frac{|m\times 0+2\times 0+m\times 0-2m|}{\sqrt{m^2+2^2+m^2}} = \frac{2|m|}{\sqrt{4+2m^2}}$. D'où $d\Big(O,(ABM)\Big) = \frac{2|m|}{\sqrt{4+2m^2}}$

4. Le plan (ABM) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ_m) de rayon r.
Montrer que $r = \sqrt{2+\frac{4}{2+m^2}}$ et déduire que $\sqrt{2} < r \leq 2$, pour tout $m \in \mathbb{R}$.

On a le plan (ABM) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ_m) de rayon r, donc $d\Big(O,(ABM)\Big) \leq 2$,

et on a $r = \sqrt{2^2-(\frac{2|m|}{\sqrt{4+2m^2}})^2} = \sqrt{\frac{8+2m^2}{2+m^2}} = \sqrt{2+\frac{4}{2+m^2}}$.

Soit $m \in \mathbb{R}$, on a $m^2 \geq 0 \Rightarrow 2+m^2 \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{2}{2+m^2} \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{4}{2+m^2} \leq 2 \Rightarrow 2 < 2+\frac{4}{2+m^2} \leq 4 \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{2+\frac{4}{2+m^2}} \leq 2$. D'où $\sqrt{2} < r \leq 2$.

Exercice 2

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C, D et Ω d'affixes respectives $a = 1+2i, b = \bar{a}, c = \frac{3(3+i)}{2}, d = \frac{3(1+i)}{2}$ et $\omega = \frac{5}{2}$.

1. a. Vérifier que $a+b = 2$ et en déduire que l'affixe du point P, milieu du segment $[AB]$ est $p = 1$.
$a+b = a+\bar{a} = 2Re(a) = 2\times 1 = 2$, donc $a+b = 2$. P est le milieu de $[AB] \Leftrightarrow p = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow p = \frac{2}{2} \Leftrightarrow p = 1$.

b. Montrer que a et b sont les solutions de l'équation : $z^2-2z+5 = 0$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$.
Résolvons l'équation : $z^2-2z+5 = 0$. $\Delta = (-2)^2-4\times 1\times 5 = -16 = (4i)^2$, alors l'équation admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions conjuguées $z_1 = \frac{2-4i}{2} = 1-2i = b$ et $z_2 = \frac{2+4i}{2} = 1+2i = a$. Par conséquent a et b sont les solutions de l'équation $z^2-2z+5 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

2. a. Vérifier que $|\omega-a| = \omega-b| = |\omega-c|$.
On a $|\omega-a| = |\frac{5}{2}-1-2i| = |\frac{3}{2}-2i| = \sqrt{(\frac{3}{2})^2+4} = \frac{5}{2}$
et $|\omega-b| = |\frac{5}{2}-1+2i| = |\frac{3}{2}+2i| = \sqrt{(\frac{3}{2})^2+4} = \frac{5}{2}$
et $|\omega-c| = |\frac{5-9-3i}{2}-| = |-2-\frac{3}{2}i| = \sqrt{(\frac{3}{2})^2+4} = \frac{5}{2}$.
Alors $|\omega-a| = |\omega-b| = |\omega-c|$.

b. Déduire que Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
D'après la question 2.a. on a $|\omega-a| = |\omega-b| = |\omega-c|$., donc $A\Omega = B\Omega = C\Omega$, alors le point Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

3. a. Vérifier que $\frac{d-c}{a-c} = \frac{3}{4}i$
$\frac{d-c}{a-c} = \frac{\frac{3(1+i)}{2}-\frac{3(3+i)}{2}}{(1+2i)-(1-2i)} = \frac{\frac{3+3i-9-3i}{2}}{4i} = \frac{-3}{4i} = \frac{3}{4}i$. Donc $\frac{d-c}{a-c} = \frac{3}{4}i$.

b. Montrer que $d-b = (c-a)e^{i\frac{\pi}{2}}$ puis déduire que les droites (BD) et (AC) sont perpendiculaires.
On a : $d-b = \frac{3(1+i}{2} -(1-2i) = \frac{3+3i-2+4i}{2} = \frac{1+7i}{2}$.
et $(c-a)e^{i\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{3(3+i)}{2}-(1+2i)\right)\times i = \frac{9+3i-2-4i}{2}i = \frac{7-i}{2}i = \frac{1+7i}{2}$. Donc $d-b = (c-a)e^{i\frac{\pi}{2}}$.

$d-b = (c-a)e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{d-b}{c-a} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow arg\left(\frac{d-b}{c-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \overline{\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Alors les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

4. Soit h l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{2}{3}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'. On pose $h(P) = G$.

a. Vérifier que $z' = \frac{2}{3}z + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$
On a : $h(M) = M' \Leftrightarrow z' - c = \frac{2}{3}(z - c) \Leftrightarrow z' = \frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \times \frac{3(3+i)}{2} + \frac{3(3+i)}{2} \Leftrightarrow z' = \frac{2}{3}z + \frac{3+i}{2}$. Donc $z' = \frac{2}{3}z + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$.

b. Montrer que l'affixe du point G est $g = \frac{13}{6} + \frac{1}{2}i$.
$h(P) = G \Leftrightarrow g = \frac{2}{3}p + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \Leftrightarrow g = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$. Alors $g = \frac{13}{6} + \frac{1}{2}i$. (car p=1).

5. Montrer que les points Ω, G et D sont alignés.
On a $\frac{g-\omega}{d-\omega} = \frac{\frac{13+3i-15}{6}}{\frac{3+3i-5}{2}} = \frac{\frac{-2+3i}{6}}{\frac{-2+3i}{2}} = \frac{1}{3}$. Donc $\frac{g-\omega}{d-\omega} \in \mathbb{R}$. Par conséquent les points Ω, G et D sont alignés.

Exercice 3

Une urne contient six boules indiscernables au toucher :
Quatre boules blanches numérotées : 0 ;1 ;1 ;1 et deux boules noires numérotées : 0 ;1.
On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.
On considère les événements suivants :

A :"Les deux boules tirées portent le numéro 1"
B :"Les deux boules tirées sont de même couleur"

1. a. Montrer que $p(A) = \frac{2}{5}$.
Les boules sont indiscernables au toucher donc on est dans une situation d'équiprobabilité. Alors
$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{\frac{4!}{2!2!}}{\frac{6!}{4!2!}} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

b. Montrer que $p(B) = \frac{7}{15}$.
$$p(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{C_4^2+C_2^2}{C_6^2} = \frac{6+1}{15} = \frac{7}{15}.$$

c. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.
$$p(A \bigcap B) = \frac{card(A \bigcap B}{card(\Omega)} = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$
et $p(A) \times p(B) = \frac{2}{5} \times \frac{7}{15} = \frac{14}{75}$
Puisque $\frac{1}{5} \neq \frac{14}{75}$, alors les événements A et B ne sont pas indépendants.

2. On répète l'expérience précédente trois fois successives. On considère la variable aléatoire X indiquant le nombre de fois que l'on réalise l'événement A.

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous, représentant la loi de probabilité de X.

$X = x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

Si $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ on a $p(X = k) = C_3^k p^k (1 - p)^{3-k}$.
Donc $p(X = 1) = C_3^1 p^1 (1 - p)^{3-1} = 3 \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{54}{125}$
$p(X = 2) = C_3^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^1 = 3 \times \frac{4}{25} \times \frac{3}{5} = \frac{36}{125}$.
$p(X = 3) = C_3^3 \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$.
On complète le tableau précédent par ces valeurs.

b. Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X.
$E(X) = \sum x_k \times p(X = x_k) = 0 \times \frac{27}{125} + 1 \times \frac{54}{125} + 2 \times \frac{36}{125} + 3 \times \frac{8}{125} = \frac{6}{5}$. Donc $E(X) = \frac{6}{5}$.

Problème

Partie I :

Le graphique donne les représentations graphiques (C_g) et (C_h) des fonctions $g : x \mapsto x^2$ et $h : x \mapsto 2lnx - (lnx)^2$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ dans un même repère orthonormé.

1. a. Justifier graphiquement que pour tout x de $]0,+\infty[$: $g(x) - h(x) > 0$.
   D'après le graphique on constate que la courbe (C_g) se trouve au dessus de la courbe (C_h) et ne se coupent en aucun point par conséquent pour tout x de $]0,+\infty[$: $g(x) > h(x)$. D'où pour tout x de $]0,+\infty[$: $g(x) - h(x) > 0$.

   b. Déduire que pour tout x de $]0,+\infty[$: $\frac{2lnx-(lnx)^2}{x^2} < 1$
   D'après la question précédente on a pour tout x de $]0,+\infty[$: $g(x) > h(x)$, donc pour tout x de $]0,+\infty[$: $x^2 > h(x)$, d'où pour tout x de $]0,+\infty[$: $\frac{h(x)}{x^2} < 1$.Par suite pour tout x de $]0,+\infty[$: $\frac{2lnx-(lnx)^2}{x^2} < 1$.(Remarquons que pour tout x de $]0,+\infty[$: $x^2 > 0$).

2. a. Vérifier que la fonction $H : x \mapsto xlnx - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto lnx$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$, puis déduire que $\int_1^{e^2} ln(x)\,dx = 1 + e^2$.
   La fonction H est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$, et on a pour tout$x$ de $]0,+\infty[$; $H'(x) = (x)'lnx + x(lnx)' - (x)' = lnx + 1 - 1 = lnx$.
   Alors la fonction H est une primitive de la fonction $x \mapsto lnx$ sur $]0,+\infty[$.
   Par suite $\int_1^{e^2} ln(x)\,dx = [H(x)]_1^{e^2} = H(e^2) - H(1) = 2e^2 - e^2 - 0 + 1 = 1 + e^2$. D'où $\int_1^{e^2} ln(x)\,dx = 1 + e^2$.

   b. En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^{e^2} (lnx)^2\ dx = 2e^2 - 2$
   En posant $\begin{cases} u = (lnx)^2 & \Longrightarrow u' = \frac{2lnx}{x} \\ v' = 1 & \Longrightarrow v = x \end{cases}$ on obtient :
   $\int_1^{e^2} (lnx)^2\,dx = \left[x(lnx)^2\right]_1^{e^2} - 2\int_1^{e^2} (lnx)\,dx = e^2(ln(e^2))^2 - 0 - 2(1+e^2) = 4e^2 - 2 - 2e^2 = 2e^2 - 2$.

   c. Résoudre sur l'intervalle $]0,+\infty[$ l'équation $h(x) = 0$ et en déduire les deux points d'intersection de la courbe (C_h) avec l'axe des abscisses.
   Soit $x \in]0,+\infty[$, $h(x) = 0 \Leftrightarrow 2lnx - (lnx)^2 = 0 \Leftrightarrow lnx(2 - lnx) = 0 \Leftrightarrow lnx = 0$ ou $2 - lnx = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $lnx = 2 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e^2$.
   Donc $S = \{1, e^2\}$.
   Par conséquent la courbe (C_h) coupe l'axe des abscisses en deux points $A(1,0)$ et $B(e^2,0)$.

   d. Déduire, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_h), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.
   D'après le graphique on constate que $\forall x \in [1,e^2]$, $h(x) \geq 0$, alors $A = \left(\int_1^{e^2} h(x)\,dx\right)u.a. = \left(\int_1^{e^2} \left(2lnx - (lnx)^2\right)dx\right)u.a. = \left(2\int_1^{e^2} lnx\,dx - \int_1^{e^2} (lnx)^2\,dx\right)u.a. = (2(1+e^2) - (2e^2 - 2))u.a. = 4u.a.$
   Alors l'aire demandée est de $4u.a.$

Partie II :

considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\left(lnx\right)^2}{x}$
Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Vérifier que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.
   on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} (lnx)^2 = (-\infty)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(lnx)^2}{x} = +\infty$.

D'où $\lim_{x\to 0^+}(x-\frac{(lnx)^2}{x}) = 0-\infty = -\infty$.Par suite $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

b. Montrer que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(lnx\right)^2}{x} = 0$ $\left(\text{On peut poser } t = \sqrt{x}\right)$, puis calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

En appliquant le changement de variables suivant : $\begin{cases} t = \sqrt{x} \Leftrightarrow t^2 = x \\ x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty \end{cases}$,

alors $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(lnx\right)^2}{x} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\left(ln(t^2)\right)^2}{t^2} = \lim_{t\to+\infty}\frac{4\left(lnt\right)^2}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} 4(\frac{lnt}{t})^2 = 4\times 0^2 = 0$ (car $\lim_{t\to+\infty}\frac{lnt}{t} = 0$)

donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x-\frac{(lnx)^2}{x}) = +\infty - 0 = +\infty$. Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

c. Déduire que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$

On a $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}(-\frac{(lnx)^2}{x}) = 0$. Donc $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = 0$. Par conséquent la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

2. a. Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x) = 1-\frac{2lnx-\left(lnx\right)^2}{x^2}$.

Soit $x \in \left]0,+\infty\right[$ on a $f'(x) = 1-\frac{\frac{2xlnx}{x}-\left(lnx\right)^2}{x^2} = 1-\frac{2lnx-\left(lnx\right)^2}{x^2}$.

D'où $\forall x \in \left]0,+\infty\right[; f'(x) = 1-\frac{2lnx-\left(lnx\right)^2}{x^2}$.

b. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0,+\infty\right[$.
(On peut utiliser la question I-1-b.)

On a pour tout x de $\left]0,+\infty\right[$, $f'(x) = 1-\frac{2lnx-\left(lnx\right)^2}{x^2}$, d'après la question I-1-b., on a

$\forall x \in \left]0,+\infty\right[: \frac{2lnx-\left(lnx\right)^2}{x^2} < 1$ donc $\forall x \in \left]0,+\infty\right[, f'(x) > 0$ par suite la fonction f est strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$.

3. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0,+\infty[$.
On a vu précédemment que la fonction f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et $0 \in f(\,]0,+\infty[\,) =]-\infty,+\infty[$, alors d'après un corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$.

b. Vérifier que $e^{-1} < \alpha < 1$ et montrer que $ln\alpha = -\alpha$

On a $f\left(e^{-1}\right) = e^{-1} - \frac{\left(ln(e^{-1})\right)^2}{e^{-1}} = e^{-1} - \frac{1}{e^{-1}} = \frac{1-e^2}{e}$, donc $f(e^{-1}) < 0$, et $f(1) = 1$, donc $f(1) > 0$. Alors $f(e^{-1}) < f(\alpha) < f(1)$ et comme f est strictement croissante alors $e^{-1} < \alpha < 1$.

Et on a $f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \alpha - \frac{\left(ln(\alpha)\right)^2}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \left(ln(\alpha)\right)^2 = (\alpha)^2 \Leftrightarrow \left(ln(\alpha)-\alpha\right)\left(ln(\alpha)+\alpha\right) = 0 \Leftrightarrow$

$ln(\alpha)+\alpha = 0 \Leftrightarrow ln(\alpha) = -\alpha$ $\left(\text{car } ln(\alpha)-\alpha \neq 0 \text{ puisque } ln(\alpha) < 0 < \alpha\right)$. D'où $ln\alpha = -\alpha$

c. Montrer que $f(x) \leq x$ pour tout x de $]0,+\infty[$.

On a $\forall x \in]0,+\infty[\,; f(x) = x-\frac{\left(lnx\right)^2}{x}$ donc $\forall x \in]0,+\infty[\,; f(x)-x = -\frac{\left(lnx\right)^2}{x}$ or $\forall x \in]0,+\infty[\,;$ $\frac{\left(lnx\right)^2}{x} \geq 0$, alors $\forall x \in]0,+\infty[\,; f(x)-x \leq 0$. D'où $\forall x \in]0,+\infty[\,; f(x) \leq x$

d. Montrer que $y = x$ est l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.
L'équation réduite de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1 est :
$y = f'(1)(x-1)+f(1)$, et comme $f(1) = 1-0 = 1$ et $f'(1) = 1-0 = 1$ alors $(T) : y = x-1+1$ d'où

$y = x$ est l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1.

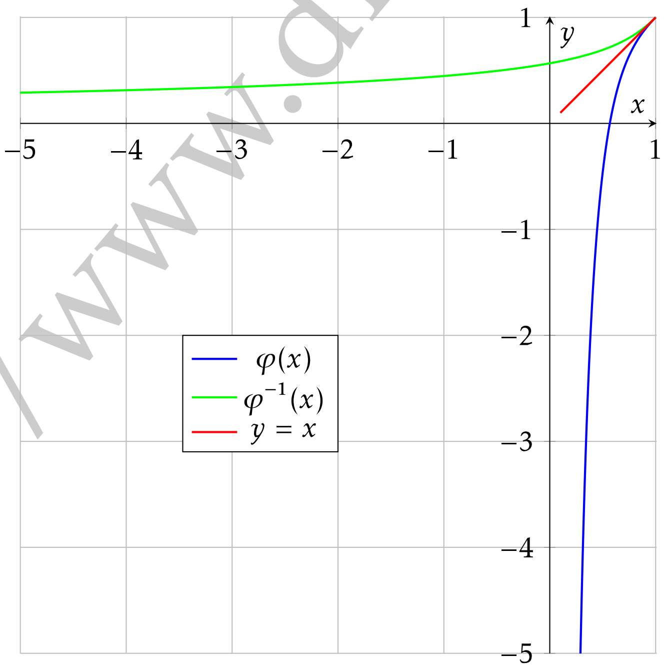
4. Le graphique donné représente la courbe (C_f) dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
   Soit φ la restriction de f sur l'intervalle $]0,1]$.

   a. Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
   (Il n'est pas demandé de déterminer l'expression de $(\varphi^{-1})(x)$)
   On a vu précédemment que la fonction f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$, donc φ est continue et strictement croissante sue l'intervalle $]0,1]$ alors la fonction φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur l'intervalle $J = \varphi(]0,1]) = \left]\lim_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right] =]-\infty,1]$.

   b. Montrer que φ^{-1} est dérivable en 0 et que $\left(\varphi^{-1}\right)'(0) = \frac{\alpha}{2+2\alpha}$.

   On a $\alpha \in]0,1]$ et $\varphi(\alpha) = 0$ donc $\varphi^{-1}(0) = \alpha$ et on a $\varphi'(\alpha) = f'(\alpha) = 1 - \frac{2ln(\alpha)-\left(ln(\alpha)\right)^2}{(\alpha)^2} = 1 - \frac{-2\alpha-(\alpha)^2}{(\alpha)^2} = 1 - \frac{-2-\alpha}{\alpha} = \frac{2+2\alpha}{\alpha}$ et comme $\alpha > 0$ alors $\varphi'(\alpha) \neq 0$ par conséquent la fonction φ^{-1} est dérivable en 0 et on a $\left(\varphi^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{\varphi'(\alpha)} = \frac{\alpha}{2+2\alpha}$.

   c. Recopier la courbe de φ et construire la courbe de (φ^{-1}) dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
   La courbe de la fonction réciproque φ^{-1} est représentée en vert dans la figure suivante :



Partie III :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que $1 < u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   Initialisation : Pour $n = 0$ on $u_0 = e$ donc $u_0 > 1$. Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $u_n > 1$ et montrons que $u_{n+1} > 1$.
   Démonstration : D'après (HR) on a $u_n > 1$ et comme la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors $f(u_n) > f(1)$ donc $u_{n+1} > 1$ car $f(1) = 1$.
   D'où $\forall n \in \mathbb{N}; u_n > 1$.

2. a. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On peut utiliser la question II-3-c).

   D'après la question II-3-c. on a $\forall x \in]0,+\infty[\,; f(x) \leq x$ donc $\forall x \in]1,+\infty[\,; f(x) \leq x$ et on sait que $\forall n \in \mathbb{N}; u_n > 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}; f(u_n) \leq u_n$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} \leq u_n$. Par conséquent la suite (u_n) est décroissante.

   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   Puisque la suite (u_n) est minorée par 1 et est décroissante alors elle est convergente.

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

   La suite (u_n) est définie par : $u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout n de $\mathbb{N}$

   et $\begin{cases} f estcontinuesur\ ]1,+\infty[\\ f(]1,+\infty[) =]1,+\infty[\\ u_0 \in]1,+\infty[\\ (u_n) estconvergente \end{cases}$, alors la limite de la suite (u_n) est la solution dans l'intervalle $[1,+\infty[$ de l'équation $f(x) = x$.

   On a $f(x) = x \Leftrightarrow x - \frac{(lnx)^2}{x} = x \Leftrightarrow \frac{(lnx}{)}^2 x = 0 \Leftrightarrow (lnx)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et comme $1 \in [1,+\infty[$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
