

Corrigé de l'épreuve de mathématique

Session normale 2025

bac SECO-SGC

Par : S. EL JAAFARI

15/06/2025

Exercice 1

considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n + 5}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2

$$u_1 = \frac{u_0 - 2}{2u_0 + 5} = \frac{0 - 0}{2 \times 2 + 5} = 0. \text{ Donc } u_1 = 0$$

$$u_2 = \frac{u_1 - 2}{2u_1 + 5} = \frac{0 - 2}{2 \times 0 + 5} = -\frac{2}{5}. \text{ Donc } u_2 = -\frac{2}{5}$$

2. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > -1$

Initialisation :

Pour $n = 0$ on a $u_0 = 2$ donc $u_0 > -1$

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que (HR) : $u_n > -1$ et montrons que $u_{n+1} > -1$.

$$\text{Démonstration : } u_{n+1} + 1 = \frac{u_n - 2}{2u_n + 5} + 1 = \frac{u_n - 2 + 2u_n + 5}{2u_n + 5} = \frac{3u_n + 3}{2u_n + 5} = \frac{3(u_n + 1)}{2u_n + 5}$$

D'après (HR) on a $u_n > -1$ donc $u_n + 1 > 0$ et $2u_n + 5 > 0$ alors $\frac{3(u_n + 1)}{2u_n + 5} > 0$ d'où $u_{n+1} + 1 > 0$.

Par conséquent $u_{n+1} > -1$.

D'après le principe de la récurrence, alors : pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > -1$.

3. On pose : $v_n = \frac{1}{1+u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Calculer v_0 .

$$v_0 = \frac{1}{1+u_0} = \frac{1}{3} \text{ donc } v_0 = \frac{1}{3}.$$

b. Calculer $v_{n+1} - v_n$ puis en déduire que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{2}{3}$. $v_{n+1} - v_n =$

$$\frac{1}{1+u_{n+1}} - \frac{1}{1+u_n} = \frac{1}{1+\frac{u_n-2}{2u_n+5}} - \frac{1}{1+u_n} = \frac{2u_n+5}{3(u_n+1)} - \frac{1}{1+u_n} = \frac{2u_n+5-3}{3(u_n+1)} = \frac{2(u_n+1)}{3(u_n+1)} = \frac{2}{3}. \text{ Donc } v_{n+1} - v_n = \frac{2}{3}.$$

Alors la suite (v_n) est arithmétique de raison $\frac{2}{3}$.

c. Exprimer v_n en fonction de n .

la suite (v_n) est arithmétique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{3}$. Alors $v_n = v_0 + \frac{2}{3}n = \frac{1}{3} + \frac{2n}{3}$.
Donc $v_n = \frac{2n+1}{3}$.

d. En déduire que $u_n = \frac{-2n+2}{2n+1}$

$$v_n = \frac{1}{1+u_n} \Leftrightarrow 1+u_n = \frac{1}{v_n} \Leftrightarrow u_n = -1 + \frac{1}{v_n}. \text{ Donc } u_n = -1 + \frac{1}{\frac{2n+1}{3}} = -1 + \frac{3}{2n+1} = \frac{-2n+2}{2n+1}. \text{ D'où } u_n = \frac{-2n+2}{2n+1}.$$

4. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2n+2}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(-2+\frac{2}{n})}{n(2+\frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{-2}{2} = -1$$

(car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$). Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.

Exercice 2

X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous.

1. Déterminer $p(X = 0)$

On a $p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = 1 \Leftrightarrow p(X = 0) + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = 1 \Leftrightarrow p(X = 0) = 1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$.
Donc $p(X = 0) = \frac{1}{2}$

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

2. Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X

On a $E(X) = 0 \times p(X = 0) + 1 \times p(X = 1) + 2 \times p(X = 2) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{3}{8} = 0 + \frac{1}{8} + \frac{6}{8} = \frac{7}{8}$.
Donc $E(X) = \frac{7}{8}$.

Exercice 3

urne contient quatre boules rouges et deux boules noires. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne. On considère les trois événements suivants :

A : "Les deux boules tirées sont rouges"

B : "La première boule tirée est noire et la deuxième est rouge"

C : "L'une des boules tirées est noire et l'autre est rouge"

1. Montrer que $p(A) = \frac{2}{5}$.

Puisque le tirage est successif et sans remise alors chaque possibilité est un arrangement de 2 boules parmi 6, d'où $\text{card}\Omega = A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = 6 \times 5 = 30$.

Et on a $\text{card}A = A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 4 \times 3 = 12$.

Donc $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$. D'où $p(A) = \frac{2}{5}$.

2. Montrer que $p(B) = \frac{4}{15}$.

On a : $\text{card}B = 2 \times 4 = 8$. Donc $p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$.

D'où $p(B) = \frac{4}{15}$.

3. Montrer que $p(C) = \frac{8}{15}$.

On a : $\text{card}C = C_2^1 \times A_4^1 = 2 \times 4 = 8$. Donc $p(C) = \frac{\text{card}C}{\text{card}\Omega} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$.

D'où $p(C) = \frac{8}{15}$.

4. Les événements B et C sont-ils indépendants? Justifier la réponse

On a $B \cap C = B$ donc $p(B \cap C) = p(B) = \frac{4}{15}$.

Et on a $p(B) \times p(C) = \frac{4}{15} \times \frac{8}{15} = \frac{32}{225}$. or $\frac{32}{225} \neq \frac{4}{15}$, alors $p(B \cap C) \neq p(B) \times p(C)$.

D'où les événements B et C ne sont pas indépendants.

Exercice 4

considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Justifier que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ puis donner une interprétation géométrique du résultat.

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$, (car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$). D'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.

Par conséquent la courbe (C_f) admet une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$ d'équation $y = -1$.

2. a. Vérifier que $f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{3(e^x + 1) - 4}{e^x + 1} = \frac{3(e^x + 1)}{e^x + 1} - \frac{4}{e^x + 1} = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$.

D'où $f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

- b. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ puis donner une interprétation géométrique du résultat.

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{4}{e^x + 1} \right) = 3. \left(\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 1) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{e^x + 1} = 0 \right).$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3.$$

Par conséquent la courbe (C_f) admet une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = 3$.

3. a. Montrer que $f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, f'(x) = \left(\frac{3e^x-1}{e^x+1} \right)' = \frac{(3e^x-1)'(e^x+1) - (3e^x-1)(e^x+1)'}{(e^x+1)^2} = \frac{3e^x(e^x+1) - e^x(3e^x-1)}{(e^x+1)^2} = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2}.$$

$$\text{D'où } f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}.$$

- b. Donner le signe de $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

On a $e^x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et $(e^x + 1)^2 > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$. D'où $\frac{4e^x}{(e^x+1)^2} > 0$. Par conséquent $f'(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

- c. Dresser le tableau de variation de f .

Tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1	3

4. a. Calculer $f(-\ln 3)$.

$$f(-\ln 3) = \frac{3e^{-\ln 3}-1}{e^{-\ln 3}+1} = \frac{\frac{3}{3}-1}{\frac{1}{3}+1} = \frac{1-1}{\frac{4}{3}} = 0.$$

$$\text{Donc } f(-\ln 3) = 0.$$

- b. Déterminer l'image de l'intervalle $[-\ln(3), 0]$ par la fonction f .

On a $f(-\ln 3) = 0$ et $f(0) = \frac{3e^0-1}{e^0+1} = \frac{2}{2} = 1$ et comme la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors $f([-\ln 3, 0]) = [f(-\ln 3), f(0)] = [0, 1]$. (car $e^0 = 1$). D'où $f([-\ln 3, 0]) = [0, 1]$.

5. Déterminer l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 0$.

L'équation de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 0$ est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow y = f'(0)(x - 0) + f(0) \Leftrightarrow y = x + 1.$$

$$\left(\text{car } f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 1 \right).$$

6. a. Montrer que $f''(x) = \frac{4e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R} f''(x) = \left(\frac{4e^x}{(e^x+1)^2} \right)' = \frac{(4e^x)'(e^x+1)^2 - 4e^x \times 2e^x(e^x+1)}{(e^x+1)^4} = \frac{4e^x(e^x+1)(e^x+1-2e^x)}{(e^x+1)^4} = \frac{4e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}.$$

$$\text{D'où } f''(x) = \frac{4e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3} \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}.$$

- b. En déduire que (C_f) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

On a $f''(x) = \frac{4e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$ et puisque $\begin{cases} 4e^x > 0 \\ (e^x+1)^3 > 0 \end{cases}$, alors $f''(x)$ a le même signe que $1 - e^x$.

et on a : $1 - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ et $1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$. D'où le tableau de signe de $f''(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$1 - e^x$	+	0	-
$f''(x)$	+	0	-

D'après le tableau de signe de $f''(x)$ on déduit que f'' s'annule en 0 en changeant de signe et par conséquent la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse 0. D'où le point $I(0, 1)$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f) .

7. Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = 4\ln(e^x + 1) - x$.

- a. Montrer que la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = 4 \frac{(e^x+1)'}{e^x+1} - 1 = 4 \frac{e^x}{e^x+1} - 1 = \frac{4e^x - e^x - 1}{e^x+1} = \frac{3e^x - 1}{e^x+1}$. Donc $F'(x) = f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Alors F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

- b. Dans la figure ci-dessous (C_f) est la courbe représentative de f dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Montrer que l'aire du domaine limité par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 2$ (La partie hachurée) est égale à $(4\ln 3 - 5\ln 2)u.a.$.

Dans le graphique on constate que la partie de la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[0, \ln 2]$ est au dessus de l'axe des abscisses, donc $f(x) \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[0, \ln 2]$, par conséquent

l'aire du domaine hachuré est $A = \left(\int_0^{\ln 2} f(x) dx \right) u.a. = \left[F(x) \right]_0^{\ln 2} = (F(\ln 2) - F(0)) u.a.$

$= (4\ln(e^{\ln 2} + 1) - \ln 2 - 4\ln(2)) u.a. = (4\ln 3 - 5\ln 2) u.a.$ D'où $A = (4\ln 3 - 5\ln 2) u.a.$

