

Corrigé De L'épreuve De Mathématiques

Session Normale 2025

BIOF SM

Par : S. EL JAAFARI

15/06/2025

Exercice 1

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+e}$ et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère **orthogonal** $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Partie 1

1. a. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(1-x) = f(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(1-x) = \frac{e^{1-x}}{e^{2(1-x)}+e} = \frac{\frac{e}{e^x}}{e+\frac{e^2}{e^{2x}}} = \frac{e^x}{e^{2x}+e} = f(x)$. D'où $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(1-x) = f(x)$

- b. Interpréter ce résultat graphiquement :

En posant $a = \frac{1}{2}$ on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(2a-x) = f(x)$, et comme f est définie sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{cases} (\forall x \in \mathbb{R}) ; f(2a-x) = f(1-x) = f(x), \\ (\forall x \in \mathbb{R}) ; 2a-x = 1-x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Alors la courbe (Γ) admet un axe de symétrie d'équation $x = \frac{1}{2}$

- c. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} + e) = e$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + e} = 0$.

En plus on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(1-x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$. (il suffit de poser $t = 1-x$).

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

- d. Interpréter graphiquement les deux résultats obtenus.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, alors la courbe (Γ) admet une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ d'équation $y = 0$.

2. a. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = f(x) \frac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \frac{(e^x)(e^{2x}+e) - (e^x)(2e^{2x})}{(e^{2x}+e)^2} = \frac{e^{3x}+e^{x+1}-2e^{3x}}{(e^{2x}+e)^2} = \frac{e^{x+1}-e^{3x}}{(e^{2x}+e)^2} = \frac{e^x}{e^{2x}+e} \times \frac{e-e^{2x}}{e^{2x}+e} = f(x) \frac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}$

D'où $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = f(x) \frac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}$.

- b. Donner les variations de la fonction f , puis en déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 0 < f(x) < \frac{1}{2}$.

On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : e^x > 0$ et $e^{2x} + e > 0$. Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) > 0$.

et puisque $(\forall x \in \mathbb{R}) , 1 + e^{2x-1} > 0$, alors le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $1 - e^{2x-1}$.

Comme on a : $\begin{cases} f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^{2x-1} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, \\ f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^{2x-1} > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}. \end{cases}$, alors la fonction f est croissante sur l'intervalle

$]-\infty; +\frac{1}{2}]$ et elle est décroissante sur l'intervalle $[\frac{1}{2}; +\infty[$.

On déduit alors, que la fonction f admet un maximum absolu atteint en $\frac{1}{2}$ qui est $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2\sqrt{e}}$.

D'où $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{e}}$.

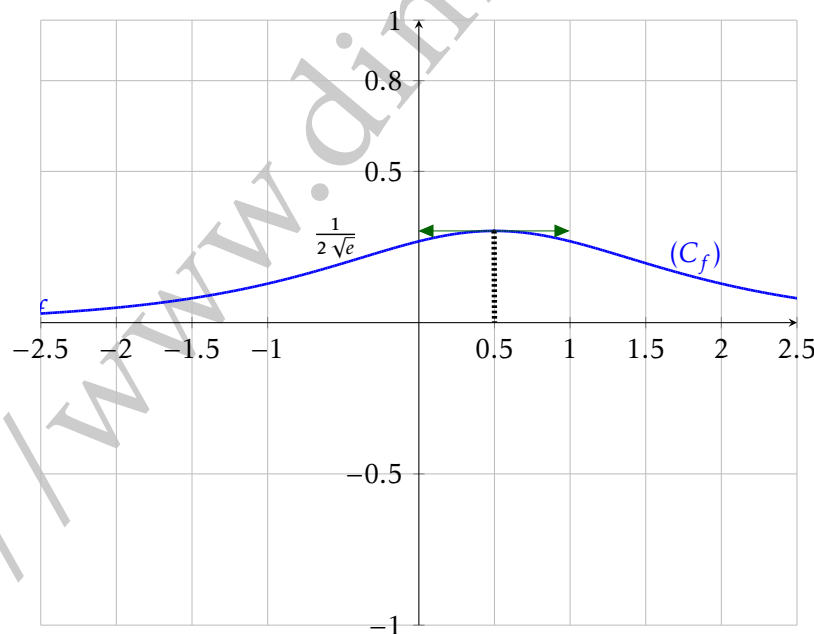
Or $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) > 0$. Alors $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 0 < f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{e}} < \frac{1}{2}$ car $(\frac{1}{2\sqrt{e}} \cong 0,30)$.
D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 0 \leq f(x) < \frac{1}{2}$.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{1}{2\sqrt{e}}$	0

3. Représenter graphiquement la courbe (Γ) .

(On prendra $\|\vec{i}\| = 1cm$, $\|\vec{j}\| = 2cm$ et $\frac{1}{2\sqrt{e}} \simeq 0,30$ et $\frac{1}{1+e} \simeq 0,27$).



4. a. Montrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$.

En appliquant le changement de variables $\begin{cases} t = 1 - x, \\ dt = -dx, \\ x = 0 \Rightarrow t = 1, \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \end{cases}$, on obtient :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_1^{\frac{1}{2}} -f(1-t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(1-t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx. \quad \text{D'où} \quad \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx.$$

b. En déduire que : $\int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$.

On a : $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$, d'après la relation de chasles des intégrales.

Donc $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$. D'où $\int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$.

5. a. En effectuant le changement de variables $t = e^x$, Montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{t^2+e} dt$.

En appliquant le changement de variables suivant : $\begin{cases} t = e^x, \\ dt = e^x dx, \\ x = 0 \Rightarrow t = 1, \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \sqrt{e}. \end{cases}$ on obtient :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{t}{t^2+e} \frac{dt}{t} = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{t^2+e} dt.$$

b. Montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\arctan \sqrt{e} - \frac{\pi}{4} \right)$.

En appliquant le changement de variables : $\begin{cases} u = \frac{t}{\sqrt{e}}, \\ du = \frac{dt}{\sqrt{e}}, \\ t = 1 \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{e}}, \\ t = \sqrt{e} \Rightarrow u = 1. \end{cases}$ on obtient :

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{t^2+e} dt &= \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^1 \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{e}}\right)^2+1} \frac{dt}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^1 \frac{1}{1+u^2} du = \left[\frac{1}{\sqrt{e}} \arctan(u) \right]_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \right) = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{e}) \right) \right) \quad \text{car : } \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{e}). \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\arctan(\sqrt{e}) - \frac{\pi}{4} \right).$$

c. En déduire l'aire, en cm^2 , du domaine plan délimité par (Γ) , les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

On a : L'aire $A = \left(\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx \right) u.a. = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\arctan \sqrt{e} - \frac{\pi}{4} \right) u.a.$,
or $1 u.a. = 1 \times 2 cm^2 = 2 cm^2$, alors l'aire $A = \frac{2}{\sqrt{e}} \left(\arctan \sqrt{e} - \frac{\pi}{4} \right) cm^2$

Partie 2

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in]0, \frac{1}{2}[\\ u_{n+1} = f(u_n) ; (\forall n \in \mathbb{N}). \end{cases}$

1. En utilisant le résultat I-1-a) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) ; |f'(x)| \leq f(x)$.

En effet on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; |1 - e^{2x-1}| \leq 1 + e^{2x-1}$ car $|a+b| \leq |a| + |b|$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \left| \frac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}} \right| \leq 1$.

Or $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) > 0$, alors : $f(x) \times \left| \frac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}} \right| \leq f(x)$.

D'où $(\forall x \in \mathbb{R}) ; |f'(x)| \leq f(x)$.

2. a. Montrer que $(\forall x \in]0; \frac{1}{2}[) ; 0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$.

D'après le résultat de la question I-2-b) on a vu que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $] -\infty; \frac{1}{2}[$. Par conséquent f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; \frac{1}{2}[$.

D'où $(\forall x \in]0; \frac{1}{2}[) ; f'(x) \geq 0$.

On a montré aussi que $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 0 < f(x) < \frac{1}{2}$, donc $(\forall x \in]0; \frac{1}{2}[) ; 0 < f(x) < \frac{1}{2}$.

Alors $(\forall x \in]0; \frac{1}{2}[) ; 0 \leq f'(x) \leq f(x) < \frac{1}{2}$. Par suite $(\forall x \in]0; \frac{1}{2}[) ; 0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$.

b. Montrer que la fonction $g : x \mapsto g(x) = f(x) - x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

En effet, on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g'(x) = f'(x) - 1$, et comme on a $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$, alors $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g'(x) < -\frac{1}{2}$. D'où $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g'(x) < 0$.

Par conséquent la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

c. En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0; \frac{1}{2}[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

En effet : la fonction g est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0; \frac{1}{2}]$, et comme $g(0) = \frac{1}{1+e}$ et $g(\frac{1}{2}) = \frac{1-\sqrt{e}}{2\sqrt{e}}$ et $g(0) \times g(\frac{1}{2}) < 0$, alors d'après le théorème de la bijection (ou le corollaire du TVI) il existe un unique α de l'intervalle $]0; \frac{1}{2}[$ tel que : $g(\alpha) = 0$.

Par conséquent il existe un unique réel $\alpha \in]0; \frac{1}{2}[$ tel que, $f(\alpha) = \alpha$.

3. a. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < \frac{1}{2}$.

Raisonnons par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 0$ On a : $u_0 \in]0; \frac{1}{2}[$ par construction de la suite. Donc $0 < u_0 < \frac{1}{2}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 < u_n < \frac{1}{2}$ et montrons que $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$.

Démonstration : On a f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; \frac{1}{2}]$ et $0 < u_n < \frac{1}{2}$, alors $f(0) < f(u_n) < f(\frac{1}{2})$ donc $0 < \frac{1}{1+e} < u_{n+1} < \frac{1}{2\sqrt{e}} < \frac{1}{2}$. D'où $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$.

d'après le principe de la récurrence on a : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < \frac{1}{2}$.

- b. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

Soient x et y deux nombres de l'intervalle $]0; \frac{1}{2}[$ tels que $x \neq y$.

Puisque f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $\begin{cases} f \text{ est continue sur l'intervalle } [x; y] \\ f \text{ est dérivable sur l'intervalle }]x; y[\\ (\forall t \in]x; y[; |f'(t)| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$.

D'après le théorème des inégalités des accroissements finis on a : $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$.

Or $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in]0; \frac{1}{2}[$ et $\alpha \in]0; \frac{1}{2}[$, donc $(\forall n \in \mathbb{N}); |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

Et puisque $f(\alpha) = \alpha$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ alors : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

- c. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, donc $-\frac{1}{2} < -\alpha < 0$, et comme $0 < u_0 < \frac{1}{2}$, alors $-\frac{1}{2} < u_0 - \alpha < \frac{1}{2}$. Donc, $|u_0 - \alpha| < \frac{1}{2}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, Supposons que $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$ et montrons que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n+2}$.

Démonstration : D'après (HR) on a $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$ et d'après la question II-3-b) on a $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$. alors : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{n+1}$. D'où $|u_{n+1} - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n+2}$.

Alors : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$.

- d. En déduire que la suite (u_n) converge vers α .

En posant $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = (\frac{1}{2})^{n+1}$, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \alpha| \leq v_n$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, alors la suite (u_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

Partie 3

Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), S_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{k}{e^{\frac{k}{n}} + e^{\frac{n-k}{n}}}.$$

1. a. Vérifier que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{e^{\frac{k}{n}} + e^{1-\frac{k}{n}}} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n} \cdot e^{\frac{k}{n}}}{e^{2\frac{k}{n}} + e} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right). \end{aligned}$$

D'où :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

b. Montrer que : $\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$.

En appliquant le changement de variables : $\begin{cases} t = 1 - x, \\ dt = -dx, \\ x = 0 \Rightarrow t = 1, \\ x = 1 \Rightarrow t = 0. \end{cases}$ on obtient :

$$\int_0^1 x f(x) dx = \int_1^0 (1-t) f(1-t) (-dt) = - \int_1^0 f(1-t) dt + \int_1^0 t f(1-t) dt \quad \text{Or } (\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = f(1-x),$$

$$\text{alors } \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 t f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 x f(x) dx.$$

Donc $2 \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$ et comme $\int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$ (d'après le résultat de la question I-4-b)); alors $2 \int_0^1 x f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$ d'où : $\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$.

2. Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

On a montré à la question III-1-a) que

$$(\forall n \in \mathbb{N}); S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}); S_n = \frac{n}{n+1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

On pose pour tout entier naturel non nul n ,

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

et on considère la suite numérique $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $a_n = \frac{n}{n+1}$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x f(x)$. Donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); S_n = a_n \times T_n$$

Il est évident que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers 1, et puisque la fonction g est continue sur l'intervalle $[0; 1]$ et on a la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right)$$

est une suite de Riemann donc elle est convergente vers $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\arctan(\sqrt{e}) - \frac{\pi}{4} \right).$$

D'où la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\arctan(\sqrt{e}) - \frac{\pi}{4} \right)$$

Exercice 2

Soit $\alpha \in [0; 2\pi[$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α) d'inconnue z :

$$(E_\alpha) : z^2 - 2^\alpha e^{i\alpha}(1+2i)z + i2^{2\alpha+1}e^{i2\alpha}$$

Partie 1

1. a. Vérifier que $\Delta_\alpha = (2^\alpha e^{i\alpha}(1-2i))^2$

En effet on a : $\Delta_\alpha = (-2^\alpha e^{i\alpha}(1+2i))^2 - 4i2^{2\alpha+1}e^{i2\alpha} = 2^{2\alpha}e^{i2\alpha}(1+4i-4-8i) = 2^{2\alpha}e^{i2\alpha}(1-2i)^2$
 $= 2^\alpha e^{i\alpha}(1-2i))^2$. D'où : $\Delta_\alpha = (2^\alpha e^{i\alpha}(1-2i))^2$.

- b. En déduire les deux solutions a et b de l'équation (E_α) telles que $|a| < |b|$.

Les deux solutions de l'équation (E_α) sont $z_1 = \frac{2^\alpha e^{i\alpha}(1+2i) - 2^\alpha e^{i\alpha}(1-2i)}{2} = i2^{\alpha+1}e^{i\alpha}$ et
 $z_2 = \frac{2^\alpha e^{i\alpha}(1+2i) + 2^\alpha e^{i\alpha}(1-2i)}{2} = 2^\alpha e^{i\alpha}$. Donc $|z_1| = 2^{\alpha+1}$ et $|z_2| = 2^\alpha$ et $2^\alpha < 2^{\alpha+1}$, alors $|z_2| < |z_1|$. D'où $a = 2^\alpha e^{i\alpha}$ et $b = i2^{\alpha+1}e^{i\alpha}$.

2. Vérifier que $\frac{b}{a}$ est un imaginaire pur

On a : $\frac{b}{a} = \frac{i2^{\alpha+1}e^{i\alpha}}{2^\alpha e^{i\alpha}} = 2i$. Donc $\frac{b}{a} = 2i$. Par conséquent $\frac{b}{a}$ est un imaginaire pur.

Partie 2

On pose : $\frac{b}{a} = \lambda i$ où $\lambda = \text{Im}\left(\frac{b}{a}\right)$.

1. Dans un repère orthonormé direct on considère les points $A(a), B(b)$ et $H(h)$ où $\frac{1}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

- a. Montrer que $\frac{h}{b-a} = -\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)i$; puis déduire que $(OH) \perp (AB)$.

On a : $\frac{b}{a} = \lambda i \Leftrightarrow b = \lambda i a$. Donc $\frac{h}{b-a} = \frac{\frac{ab}{a+b}}{b-a} = \frac{ab}{b^2-a^2} = \frac{\lambda i a^2}{a^2(-\lambda^2-1)} = \frac{\lambda i}{-\lambda^2-1}$.

Alors : $\frac{h}{b-a} = -\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)i$.

Comme $\frac{z_H - z_O}{z_B - z_A} = \frac{h}{b-a} = -\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)i$; donc $\frac{z_H - z_O}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$. Par conséquent $(OH) \perp (AB)$

- b. Montrer que $\frac{h-a}{b-a} = \frac{1}{\lambda^2+1}$ puis en déduire que les points H, A et B sont alignés.

On a $\frac{h-a}{b-a} = \frac{\frac{ab}{a+b} - a}{b-a} = \frac{\frac{b}{a+b} - 1}{\frac{b}{a} - 1} = \frac{\frac{\lambda i}{1+\lambda i}}{\frac{1}{1+\lambda i} - 1} = \frac{1}{(1+\lambda i)(1-\lambda i)} = \frac{1}{\lambda^2+1}$. Donc

$$\frac{h-a}{b-a} = \frac{1}{\lambda^2+1}$$

et on a $\frac{z_H - z_A}{z_B - z_A} = \frac{h-a}{b-a} = \frac{1}{\lambda^2+1}$. Donc $\frac{z_H - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$. Par conséquent les points H, A et B sont alignés.

2. Soient $I(m)$ le milieu du segment $[OH]$ et $J(n)$ le milieu du segment $[HB]$.

a. Montrer que $\frac{n}{m-a} = -\lambda i$

On a $m = \frac{h}{2}$ et $n = \frac{h+b}{2}$. Donc $\frac{n}{m-a} = \frac{\frac{h+b}{2}}{\frac{h}{2}-a} = \frac{1+\frac{b}{h}}{1-\frac{2a}{h}} = \frac{1+b(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}{1-2a(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})} = \frac{2+\lambda i}{-1-\frac{2}{\lambda i}} = -\frac{\lambda i(2+\lambda i)}{2+\lambda i} = -\lambda i$. D'où $\frac{n}{m-a} = -\lambda i$

b. En déduire que les droites (OJ) et (AI) sont perpendiculaires et que $OJ = |\lambda| \times AI$.

On a $\frac{z_J - z_O}{z_I - z_A} = \frac{n}{m-a} = -\lambda i$. Donc $\frac{z_J - z_O}{z_I - z_A} \in i\mathbb{R}$. Par suite $(OJ) \perp (AI)$

En plus $\frac{z_J - z_O}{z_I - z_A} = \frac{n}{m-a} = -\lambda i \Rightarrow \left| \frac{z_J - z_O}{z_I - z_A} \right| = |-\lambda i| \Rightarrow \frac{|z_J - z_O|}{|z_I - z_A|} = |\lambda|$, Donc $\frac{OJ}{AI} = |\lambda|$.

Par conséquent $OJ = |\lambda| \times AI$.

c. Soit K le point d'intersection des droites (OJ) et (AI) .
Montrer que les points K, I, H et J sont cocycliques.

On a $(OH) \perp (AB)$ et les points H, A et B sont alignés, donc le triangle OHB est rectangle en H .
En plus I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[HB]$ donc IHJ est un triangle rectangle en H .

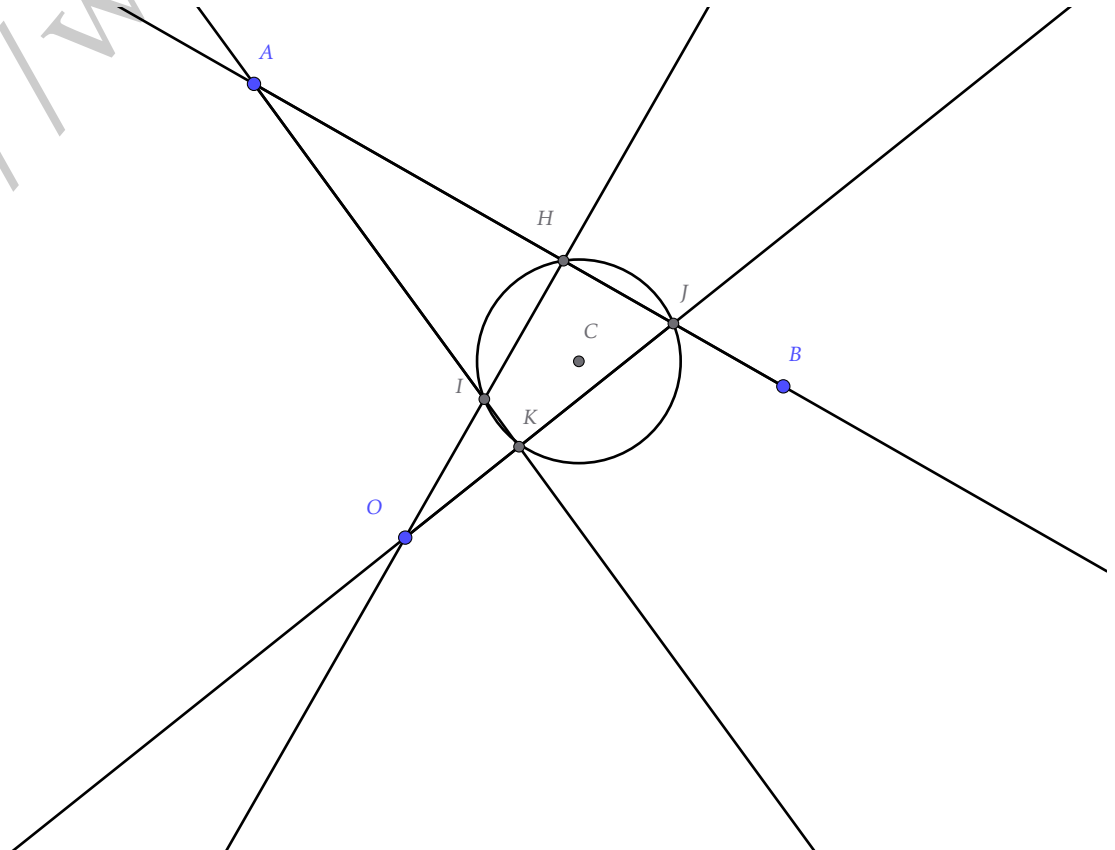
Notons par (C) le cercle circonscrit au triangle IHJ ; donc le triangle IHJ a pour diamètre $[IJ]$.

d'autres parts on a $(OJ) \perp (AI)$ et K est le point d'intersection de (AI) avec (OJ) , donc le triangle IKJ est rectangle en K . Alors le cercle circonscrit au triangle IKJ a pour diamètre $[IJ]$.

D'où les deux triangles IKJ et IHJ sont circonscrits par le cercle (C) . Alors les points K, I, H et J appartiennent au cercle (C) . D'où les points K, I, H et J sont cocycliques.

d. Montrer que les droites (IJ) et (OA) sont perpendiculaires.

Dans le triangle OAJ , on a $(OH) \perp (AJ)$ donc $[OH]$ est la hauteur du triangle OAJ issue de O .
De même on a $(AK) \perp (OJ)$ donc $[AK]$ est la hauteur du triangle OAJ issue de A . Et comme les droites (OH) et (AK) se coupent au point I , alors I est l'orthocentre du triangle OAJ . Par suite la troisième hauteur du triangle OAJ issue de J passe par I . D'où $(IJ) \perp (OA)$.



Exercice 3

Soit p un nombre premier impair et a un entier premier avec p .

1. Montrer que $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$ ou $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 [p]$.

Puisque p est premier et a et p sont premiers entre eux, alors d'après le petit théorème de Fermat, on a : $a^{p-1} \equiv 1 [p]$. Et comme p est impair alors $p-1$ est pair, d'où $a^{p-1} - 1 = (a^{\frac{p-1}{2}} - 1)(a^{\frac{p-1}{2}} + 1)$. Par suite $a^{p-1} - 1 \equiv 0 [p] \Leftrightarrow (a^{\frac{p-1}{2}} - 1)(a^{\frac{p-1}{2}} + 1) \equiv 0 [p] \Leftrightarrow (a^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 [p] \text{ ou } a^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0 [p]) \Leftrightarrow (a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [2p] \text{ ou } a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 [2p])$. Par conséquent $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$ ou $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 [p]$.

2. Soit x_0 une solution de l'équation $ax^2 \equiv 1 [p]$ dans $\mathbb{Z}$.

- a. Montrer que $x_0^{p-1} \equiv 1 [p]$.

x_0 est une solution de l'équation $ax^2 \equiv 1 [p] \Leftrightarrow ax_0^2 \equiv 1 [p] \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) : ax_0^2 = 1 + pk \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) : x_0(ax_0) + p(-k) = 1 \Leftrightarrow (\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2) : x_0u + pv = 1$. (On pose $u = ax_0$ et $v = -k$). Alors, d'après le théorème de Bézout $p \wedge x_0 = 1$. Par suite d'après le petit théorème de Fermat, on a : $x_0^{p-1} \equiv 1 [p]$.

- b. En déduire que $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$.

On a $ax_0^2 \equiv 1 [p] \Rightarrow (ax_0^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$ (Car la multiplication est compatible avec la congruence et $\frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$)
 $\Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} x_0^{p-1} \equiv 1 [p]$ or $x_0^{p-1} \equiv 1 [p]$, alors $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- a. Montrer que $p | (2^{2n+1} - 1) \Rightarrow 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$.

Supposons que $p | (2^{2n+1} - 1) \Rightarrow 2^{2n+1} \equiv 1 [p] \Rightarrow 2(2^{2n}) \equiv 1 [p] \Rightarrow 2(2^n)^2 \equiv 1 [p] \Rightarrow (x_0 = 2^n \text{ est une solution de l'équation } 2x^2 \equiv 1 [p]) \Rightarrow 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$ d'après la question II-2-b. D'où $p | (2^{2n+1} - 1) \Rightarrow 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$.

- b. En déduire que l'équation $11x + (2^{2n+1} - 1)y = 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$.

Pour cela montrons que $11 \wedge (2^{2n+1} - 1) = 1$.

Supposons que $11 \wedge (2^{2n+1} - 1) \neq 1$ et puisque 11 est premier alors $11 | (2^{2n+1} - 1) \Rightarrow 2^{\frac{11-1}{2}} \equiv 1 [11]$ (D'après la question II-3-a.). Or $2^{\frac{11-1}{2}} = 2^5 = 32$ et $32 \equiv -1 [11]$ ce qui est absurde car $-1 \neq 1$ Donc 11 ne divise pas $(2^{2n+1} - 1)$. Par suite $11 \wedge (2^{2n+1} - 1) = 1$. D'où l'équation $11x + (2^{2n+1} - 1)y = 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$.

4. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(F) : x^2 + 5x + 2 \equiv 0 [11]$.

- a. Montrer que : $(F) \Leftrightarrow 2(2x+5)^2 \equiv 0 [11]$.

On a : $2(2x+5)^2 = 8x^2 + 40x + 50$ et $8 \times 7 \equiv 1 [11]$.

$\Rightarrow x^2 + 5x + 2 \equiv 0 [11] \Rightarrow 8 \times (x^2 + 5x + 2) \equiv 0 [11] \Rightarrow 8x^2 + 40x + 16 \equiv 0 [11] \Rightarrow 2(2x+5)^2 - 34 \equiv 0 [11] \Rightarrow 2(2x+5)^2 \equiv 1 [11]$. (car $34 \equiv 1 [11]$).

$\Leftrightarrow 2(2x+5)^2 \equiv 1 [11] \Rightarrow 8x^2 + 40x + 50 \equiv 1 [11] \Rightarrow 7 \times (8x^2 + 40x + 50) \equiv 7 [11] \Rightarrow 56x^2 + 280x + 350 \equiv 7 [11] \Rightarrow x^2 + 5x + 2 \equiv 0 [11]$ (car $280 \equiv 5 [11]$, $343 \equiv 2 [11]$ et $56 \equiv 1 [11]$). D'où $(F) \Leftrightarrow 2(2x+5)^2 \equiv 1 \pmod{11}$.

- b. En déduire que l'équation (F) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}$.

En posant $X = 2x+5$ donc l'équation $(F) \Leftrightarrow 2X^2 \equiv 1 \pmod{p}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que l'équation (F) admet une solution $x_0 \in \mathbb{Z}$, donc l'équation $2X^2 \equiv 1 [11]$ admet aussi une solution $X_0 = 2x_0 + 5$, d'après le résultat de la question 2 alors $2^{\frac{11-1}{2}} \equiv 1 [11]$ donc $2^5 - 1 \equiv 0 [11]$ c'est à dire 31 est divisible par 11, ce qui est absurde. D'où l'équation (F) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 4

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif de zéro la matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Soient la matrice : $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et l'ensemble $\mathcal{E} = \{M(x) = I + xA \mid x \in \mathbb{R}\}$

1. a. Vérifier que $A^2 = -2A$.

$$\text{On a } A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = -2A. \text{ Donc } A^2 = -2A$$

- b. En déduire que $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 ; M(x) \times M(y) = M(x + y - 2xy)$.

Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ on a $M(x) \times M(y) = (I + xA)(I + yA) = I^2 + xI \times A + yA \times I + xyA^2 = I + (x + y)A + xy(-2A) = I + (x + y - 2xy)A$ (Car $I^2 = I, I \times A = A \times I = A$ et $A^2 = -2A$) D'où : $M(x) \times M(y) = M(x + y - 2xy)$.

2. a. Calculer $M(\frac{1}{2}) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$M(\frac{1}{2}) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ D'où } M(\frac{1}{2}) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = O.$$

- b. En déduire que la matrice $M(\frac{1}{2})$ n'est pas inversible dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

Raisonnons par l'absurde et Supposons que la matrice $M(\frac{1}{2})$ est inversible dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$ donc

il existe une matrice N de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $N \times M(\frac{1}{2}) = I$, en multipliant par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{on obtient } N \times M(\frac{1}{2}) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } N \times O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui est absurde. Donc la matrice $M(\frac{1}{2})$ n'est pas inversible dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

3. Montrer que $\mathcal{E} - \{M(\frac{1}{2})\}$ est stable pour la multiplication dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq \frac{1}{2}$ et $y \neq \frac{1}{2}$ donc $(x - \frac{1}{2})(y - \frac{1}{2}) \neq 0$; et puisque $(x - \frac{1}{2})(y - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}(x + y - 2xy - \frac{1}{2})$ alors $x + y - 2xy - \frac{1}{2} \neq 0$, donc $x + y - 2xy \neq \frac{1}{2}$. or $M(x) \times M(y) = M(x + y - 2xy)$ alors $M(x) \times M(y) \neq M(\frac{1}{2})$. Donc $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) M(x) \times M(y) \in \mathcal{E} - \{M(\frac{1}{2})\}$. D'où $\mathcal{E} - \{M(\frac{1}{2})\}$ est stable pour la multiplication dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4. Montrer que $(\mathcal{E} - \{M(\frac{1}{2})\}, \times)$ est un groupe commutatif.

Puisque $\mathcal{E} - \{M(\frac{1}{2})\}$ est stable pour la multiplication dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\times$ est associative dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ alors $\times$ est associative dans $\mathcal{E} - \{M(\frac{1}{2})\}$ et comme $I = M(0) = I + 0.A$ alors $I \in \mathcal{E} - \{M(\frac{1}{2})\}$.

Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq \frac{1}{2}$ et $y \neq \frac{1}{2}$, on a $M(x) \times M(y) = M(x + y - 2xy) = M(y + x - 2yx) = M(y) \times M(x)$. Donc $\forall (x; y) \in (\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\})^2 M(x) \times M(y) = M(y) \times M(x)$ alors $\times$ est commutative dans $\mathcal{E} - \{M(\frac{1}{2})\}$.

Soit $x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$, déterminons y de $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ tel que $M(x) \times M(y) = I$.

$$M(x) \times M(y) = I \Leftrightarrow M(x + y - 2xy) = M(0) \Leftrightarrow x + y - 2xy = 0 \Leftrightarrow y(2x - 1) = x \Leftrightarrow y = \frac{x}{2x-1}.$$

Montrons que $\frac{x}{2x-1} \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$. En effet on a $\frac{x}{2x-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2(2x-1)}$ et $\frac{1}{2(2x-1)} \neq 0$ Donc $\frac{x}{2x-1} \neq \frac{1}{2}$ d'où $(\forall x \in (\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\})) (\exists y \in (\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\})) / M(x) \times M(y) = I$ donc $M(x)$ est inversible pour la multiplication des matrices dans $\mathcal{E} - \{M(\frac{1}{2})\}$.

Alors $(\mathcal{E} - \{M(\frac{1}{2})\}, \times)$ est un groupe commutatif.

5. On munit $\mathcal{E}$ de la loi de composition interne T définie par : $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 ; M(x)TM(y) = M(x + y - \frac{1}{2})$
On considère l'application φ définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{E}$ par : $(\forall x \in \mathbb{R}); \varphi(x) = M(\frac{1-x}{2})$

- a. Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathcal{E}, T)$ et que $\varphi(\mathbb{R}) = \mathcal{E}$.

Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ montrons que $\varphi(x + y) = \varphi(x)T\varphi(y)$.

On a $\varphi(x + y) = M\left(\frac{1-(x+y)}{2}\right)$ et $\varphi(x)T\varphi(y) = M\left(\frac{1-x}{2}\right)TM\left(\frac{1-y}{2}\right) = M\left(\frac{1-x}{2} + \frac{1-y}{2} - \frac{1}{2}\right) = M\left(\frac{1-(x+y)}{2}\right)$.

Donc $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2); \varphi(x + y) = \varphi(x)T\varphi(y)$, par conséquent φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathcal{E}, T)$.

Montrons que $\varphi(\mathbb{R}) = \mathcal{E}$.

Puisque φ est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{E}$ alors $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}$, il suffit de montrer que $\mathcal{E} \subset \varphi(\mathbb{R})$.

Soit $M \in \mathcal{E}$, $\exists x \in \mathbb{R} : M = M(x)$ Déterminons un nombre réel y tel que $\varphi(y) = M$.

On a $\varphi(y) = M \Leftrightarrow M\left(\frac{1-y}{2}\right) = M(x) \Leftrightarrow \frac{1-y}{2} = x \Leftrightarrow y = 1 - 2x$.

Donc $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : \varphi(y) = M(x)$. D'où $\mathcal{E} \subset \varphi(\mathbb{R})$.

Par conséquent $\varphi(\mathbb{R}) = \mathcal{E}$.

- b. En déduire que $(\mathcal{E}, T)$ est un groupe commutatif.

Puisque $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif et φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathcal{E}, T)$, alors $(\varphi(\mathbb{R}), T)$ est un groupe commutatif, or $\varphi(\mathbb{R}) = \mathcal{E}$ donc $(\mathcal{E}, T)$ est un groupe commutatif.

6. Montrer que $(\mathcal{E}, T, \times)$ est un corps commutatif.

On a montré que $(\mathcal{E}, T)$ est un groupe commutatif (question 5.a.) et on a montré que $(\mathcal{E} - \{M(\frac{1}{2})\}, \times)$ est un groupe commutatif (question 4). Montrons que $\times$ est distributive par rapport à T dans $\mathcal{E}$. Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ montrons que $M(x) \times (M(y)TM(z)) = (M(x) \times M(y))T(M(x) \times M(z))$.

En effet on a $M(x) \times (M(y)TM(z)) = M(x) \times M(y + z - \frac{1}{2}) = M(x + y + z - \frac{1}{2} - 2x(y + z - \frac{1}{2}))$
 $= M(x + y + z - 2xy - 2xz + x) = M(2x + y + z - 2xy - 2xz - \frac{1}{2})$ et $(M(x) \times M(y))T(M(x) \times M(z))$
 $= M(x + y - 2xy)TM(x + z - 2xz) = M(x + y - 2xy + x + z - 2xz - \frac{1}{2})$

d'où $M(x) \times (M(y)TM(z)) = (M(x) \times M(y))T(M(x) \times M(z))$. Donc $\times$ est distributive par rapport à T dans $\mathcal{E}$.

On a alors :
$$\begin{cases} (\mathcal{E}, T) \text{ est un groupe commutatif} \\ (\mathcal{E} - \{M(\frac{1}{2})\}, \times) \text{ est un groupe commutatif} \\ \times \text{ est distributive par rapport à } T \text{ dans } \mathcal{E} \end{cases}$$

Donc $(\mathcal{E}, T, \times)$ est un corps commutatif.