الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2025
- الموضوع -

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS | NS 22 F

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

3 ساعات	مدة الإنجاز	الرياضيـــــــــــــــات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية بمسلكيها – خيار فرنسية-	الشعبة أو المسلك

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ **L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée**
- ✓ **Le candidat peut traiter les exercices et le problème suivant l'ordre qui lui convient**
- ✓ **L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter**

COMPOSANTES DU DUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème, indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3,5 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	2,5 points
Problème	Etude des fonctions numériques, des suites numériques et calcul intégral	11 points

- ✓ **On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.**
- ✓ **ln désigne la fonction logarithme népérien**
- ✓ **e est le nombre réel tel que $\ln(e) = 1$**

	Exercice 1 : (3 points)
	Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\ \vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les deux points $A(2,0,0)$ et $B(0,0,2)$, et la sphère (S) de centre O et de rayon $R=2$.
0,25	1) a) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère (S).
0,5	b) Vérifier que les points A et B appartiennent à la sphère (S).
	2) Soit I le milieu du segment $[\mathrm{AB}]$.
0,25	a) Déterminer l'intersection du plan (OAB) avec la sphère (S).
0,5	b) Vérifier que $\overrightarrow{\mathrm{OI}}.\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ puis montrer que $d\left(\mathrm{O};(\mathrm{AB})\right)=\sqrt{2}$.
	3) On considère un point $\mathrm{M}(0,m,0)$ de l'espace où $m\in\mathbb{R}$.
0,5	a) Vérifier que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{AM}}=2m\vec{i}+4\vec{j}+2m\vec{k}$.
0,25	b) Déduire que $mx+2y+mz+2m=0$ est une équation cartésienne du plan (ABM).
0,25	c) Montrer que $d\left(\mathrm{O};(\mathrm{ABM})\right)=\dfrac{2\lvert m\rvert}{\sqrt{4+2m^2}}$
0,5	4) Le plan (ABM) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ_m) de rayon r. Montrer que $r=\sqrt{2+\dfrac{4}{2+m^2}}$, et déduire que $\sqrt{2}<r\leq 2$ pour tout $m\in\mathbb{R}$
	Exercice 2 :(3,5 points)
	Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, On considère les points A, B, C, D et Ω d'affixes respectives $a=1+2i$, $b=\bar{a}$, $c=\dfrac{3(3+i)}{2}$, $d=\dfrac{3(1+i)}{2}$ et $\omega=\dfrac{5}{2}$.
0,5	1) a) Vérifier que $a+b=2$ et déduire que l'affixe du point P milieu du segment $[\mathrm{AB}]$ est $\mathrm{p}=1$.
0,5	b) Montrer que a et b sont les solutions de l'équation $z^2-2z+5=0$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$.
0,5	2) a) Vérifier que $\lvert\omega-a\rvert=\lvert\omega-b\rvert=\lvert\omega-c\rvert$.
0,25	b) Déduire que Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
0,25	3) a) Vérifier que $\dfrac{d-c}{a-b}=\dfrac{3}{4}i$.
0,5	b) Montrer que $d-b=(c-a)e^{i\frac{\pi}{2}}$ puis déduire que les droites (DB) et (AC) sont perpendiculaires.

4) Soit h l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{2}{3}$ et qui transforme chaque point M d'affixe z en un point $\mathrm{M'}$ d'affixe z'. On pose $\mathrm{h}(\mathrm{P}) = \mathrm{G}$.

0,25 a) Vérifier que $z' = \frac{2}{3}z + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$.

0,25 b) Montrer que l'affixe du point G est $g = \frac{13}{6} + \frac{1}{2}i$.

0,5 5) Montrer que les points Ω, G et D sont alignés.

Exercice 3 :(2,5 points)

Une urne contient six boules indiscernables au toucher:

Quatre boules blanches numérotées : 0 ; 1 ; 1 ; 1 et deux boules noires numérotées : 0 ; 1.

On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

A : « les deux boules tirées portent le numéro 1 »

B : « les deux boules tirées sont de même couleur »

0,5 1) Montrer que $p(A) = \frac{2}{5}$

0,5 2) Montrer que $p(B) = \frac{7}{15}$

0,5 3) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

4) On répète l'expérience précédente trois fois successives. On considère la variable aléatoire X indiquant le nombre de fois que l'on réalise l'événement A.

0,75 a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous, représentant la loi de probabilité de X.

$\mathrm{X} = x_i$	0	1	2	3
$p(\mathrm{X} = x_i)$	$\frac{27}{125}$			

0,25 b) Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ de la variable aléatoire X.

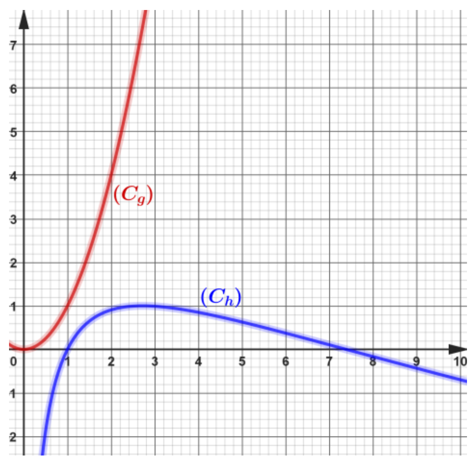
Problème :(11 points)

Partie I :

Le graphique ci-contre représente les courbes (C_g) et (C_h)

Des fonctions $g : x \mapsto x^2$ et $h : x \mapsto 2(\ln x) - (\ln x)^2$ sur

L'intervalle $]0, +\infty[$ dans un même repère orthonormé.



0,25 1) a) Justifier graphiquement que pour tout x de $]0, +\infty[$:

$$g(x) - h(x) > 0$$

0,5 b) Déduire que pour tout x de $]0,+\infty[$: $\dfrac{2(\ln x)-(\ln x)^2}{x^2}<1$.

0,5 2) a) Vérifier que la fonction $\mathrm{H}:x\mapsto x\ln x-x$ est une primitive de la fonction $x\mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$, puis déduire que $\int_1^{e^2}\ln(x)\,dx=1+e^2$.

0,5 b) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^{e^2}(\ln x)^2\,dx=2e^2-2$.

0,5 c) Résoudre sur l'intervalle $]0,+\infty[$, l'équation $h(x)=0$ et en déduire les deux points d'intersection de la courbe (C_h) avec l'axe des abscisses.

0,5 d) Déduire, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_h), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e^2$.

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x-\dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

0,5 1) a) Vérifier que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

0,5 b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$ (On peut poser $t=\sqrt{x}$), puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

0,5 c) Déduire que la droite d'équation $y=x$ est une asymptote oblique de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

0,75 2) a) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=1-\dfrac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}$.

0,5 b) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

(On peut utiliser la question Partie I-1-b)

0,5 3) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0,+\infty[$.

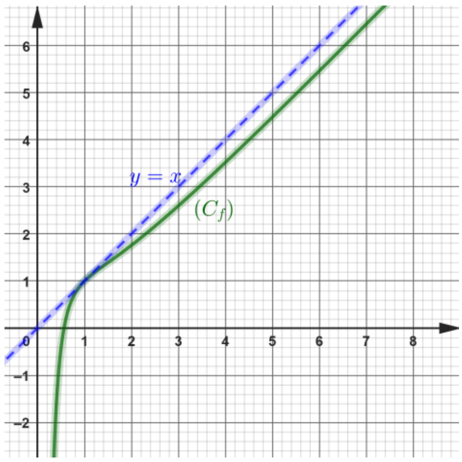
0,75 b) Vérifier que $e^{-1}<\alpha<1$ et montrer que $\ln(\alpha)=-\alpha$.

0,25 c) Montrer que $f(x)\le x$ pour tout x de $]0,+\infty[$.

0,5 d) Montrer que $y=x$ est l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.

4) Le graphique ci-contre représente la courbe (C_f)

Dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.



Soit φ la restriction de f sur l'intervalle $]0,1]$.

0,5 a) Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

0,5 b) Montrer que φ^{-1} est dérivable en 0 et que

$$\left(\varphi^{-1}\right)'(0)=\frac{\alpha}{2+2\alpha}$$

0,75 c) Recopier la courbe de φ sur votre copie et

	construire la courbe de φ^{-1} dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
	Partie III :
	Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
0,5	1) Montrer par récurrence que $1 < u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
0,5	2) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On utilise la question Partie II- 3-c)
0,25	b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
0,5	c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

FIN