

Concours d'entrée à FMP & FMD

Composante : Mathématiques

S. EL JAAFARI

N.B. Ce document contient toutes les questions posées au concours d'entrée à la première année des FMP ou des FMD aux sessions précédentes depuis 2020-2021

Les suites numériques

Q1) Soit (u_n) une suite réelle définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$

A : -1 ; B : 0 ; C : $-\infty$; D : $+\infty$; E : autre réponse.

Q2) Soit (u_n) une suite réelle définie par : $\begin{cases} u_{2n} = \frac{1}{2^n} \\ u_{2n+1} = \frac{1}{3^n} \end{cases}$.

Pour tout entier naturel n on pose :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{2n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} = \sum_{k=0}^n u_k - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \text{ alors :}$$

- A : la suite (S_n) est strictement monotone croissante de limite $\frac{7}{4}$
B : la suite (S_n) est strictement monotone décroissante de limite $\frac{7}{4}$
C : la suite (S_n) est strictement monotone croissante de limite $\frac{7}{2}$
D : la suite (S_n) est strictement monotone croissante de limite $\frac{7}{2}$
E : Aucune de ces réponses n'est vraie.

Q3) Soit $u_n = \ln(1 + ne_{-n})$; $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la bonne réponse ?

A : La suite (u_n) est bornée ;

B : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

C : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

D : La suite (u_n) est divergente

E : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Q4) Soit (w_n) la suite définie par : $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = \frac{w_n+3}{2w_n+4}$ et on pose : $y_n = \frac{4}{w_n+2}$. Vérifier la relation suivante :

A : $y_{n+1} = \frac{23}{6+y_n}$

B : $y_{n+1} = \frac{32}{6+y_n}$

C : $y_{n+1} = \frac{-6}{32+y_n}$

D : $y_{n+1} = \frac{6}{32+y_n}$

$y_{n+1} = \frac{32}{20+y_n}$.

Q5) $(U_n)_{n \geq 2}$ est la suite définie par : $U_n = (1 - \frac{1}{2^2}) \times (1 - \frac{1}{3^2}) \dots (1 - \frac{1}{n^2})$; $n \geq 2$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n =$

- A : 1 B : 0 C : $+\infty$ D : $\frac{1}{2}$ E : La limite n'existe pas.

Q6) $(U_n)_{n \geq 1}$ et $(V_n)_{n \geq 1}$ sont deux suites définies par : $U_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$; $\ln(V_n) = U_n \ln(2)$

- A : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \ln(2)$
 B : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \ln(2)$
 C : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 1$
 D : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 2$
 E : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 2$

Q7) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - \sqrt{n^2 - n}$ est égale à :

- A : $-\infty$ B : 0 C : $\frac{1}{2}$ D : 1 E : Autre réponse

Q8) Soit $x \in \mathbb{R}^*$ Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{7n})^{29n} = 2022$ alors x est égal à :

- A : $\frac{29}{7} \ln(2022)$
 B : $2022 \ln(\frac{7}{29})$
 C : $2022 \ln(\frac{29}{7})$
 D : $\frac{7}{29} \ln(2022)$
 E : Autre réponse

Q9) Si $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite telle que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); V_1 + V_2 + \dots + V_n = 2n^2 + n$ alors V_8 est égal à :

- A : 31 B : 53 C : 54 D : 62 E : 64

Q10) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in]0, 1[$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}$ on a alors :

- A : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
 B : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3}$
 C : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$
 D : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
 E : Autre réponse

Q11) (u_n) est la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + u_n$. Alors la limite de la suite (u_n) si elle existe, est égale à :

- A : 1 B : $+\infty$ C : 0 D : -1 E : Autre réponse

Q12) Si $x \in]0, 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n)$ est égale à :

A : $\frac{1}{x-1}$ B : $\frac{1}{1-x}$ C : 1 D : $\frac{-1}{1+x}$ E : $\frac{1}{1+x}$

Q13) soit $q \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^n q^k$. Si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 4$, alors q est égal à :

A : $\frac{2}{3}$ B : $\frac{3}{4}$ C : $\frac{4}{5}$ D : $\frac{5}{6}$ E : $\frac{6}{7}$

Q14) (u_n) est la suite définie par : $u_0 = 0, u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{\frac{u_{n+1}^2 + u_{n-1}^2}{2}}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ est égale à :

A : 0 B : $+\infty$ C : 1 D : $\sqrt{2}$ E : $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Q15) Si $x \in]0, 1[$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - x)^n (1 + x)^n$ est égale à :

A : $+\infty$ B : $-\infty$ C : 0 D : -1 E : 1

Q16) On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{2n}$ est égale à :

A : 0 B : e^{-4} C : e^4 D : e E : 1

Q17) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison $q = \frac{1}{3}$ alors le produit $u_1 \times u_2 \times u_3 \times \dots \times u_n$ ($n \geq 1$) est égal à :

A : $2^n \cdot 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ B : $\frac{2^n}{3^{\frac{n(n-1)}{2}}}$ C : $\frac{2^n}{3^{\frac{n(n+1)}{2}}}$ D : $2^n \cdot 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$ E : $\frac{1}{2^n \cdot 3^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

Q18) Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $w_0 = \frac{1}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}), w_{n+1} = (w_n - 1)^2 + 1$. Si $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ est égale à :

A : 0 B : 2 C : 1 D : $\frac{1}{2}$ E : -1

Q19) quad Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n}}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{u_n^2}{3-u_n^2}$. (v_n) est géométrique de raison :

A : $\frac{1}{4}$ B : 2 C : $\frac{1}{2}$ D : 4

Q20) On considère la suite numérique $(U_n)_n$ telle que : $U_0 = e^2 - 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); U_{n+1} = (1 + U_n)e^{-2} + 1$. On pose $V_n = 3(1 + U_n)$

A : (U_n) est croissante
B : (V_n) est arithmétique

- C : $U_n = e^{2n+2} - 1$
 D : $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -1$
 E : $\ln(V_0) + \ln(V_1) + \dots + \ln(V_n) = (n+1)(2 - n + \ln(3))$

Q21) On pose :

$$S = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

- A : $S_n = 1 + \frac{1}{n+1}$
 B : S est divergente
 C : S est convergente et sa somme est égale à 1
 D : S est convergente et sa somme est égale à n
 E : Toutes les réponses proposées sont fausses

Q22) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = \frac{(-1)^n}{n^2}; n \in \mathbb{N}^*$. La suite (U_n) est :

- A : Monotone
 B : Convergente
 C : Négative
 D : Décroissante et minorée
 E : Croissante et majorée

Q23) Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par : $u_n = \frac{e^n}{n^n}$ et $v_n = \ln(u_n)$.

- A : La suite (v_n) et la suite (u_n) ont la même limite.
 B : La suite (v_n) est strictement croissante.
 C : La suite (u_n) est strictement croissante.
 D : La suite (u_n) est bornée.
 E : La suite (u_n) admet une limite, et cette limite est non nulle.

Q24) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.
 On définit la suite (v_n) par : pour tout $n \in \mathbb{N}$; $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.

- A : Pour tout $n \geq 5, u_n \leq n - 3$
 B : Pour tout $n \geq 5, u_n \geq n - 3$
 C : La limite de la suite (u_n) est finie
 D : La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $\frac{25}{2}$
 E : Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n + \frac{21}{4}$

Les nombres complexes

Q1) Soit $z = \frac{(1-i)^{10}}{(+i\sqrt{3})^4}$; quelle est la bonne réponse ?

- A : $|z| = 4$ B : $|z| = \frac{1}{2}$ C : $\arg z \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ D : $\arg z \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi]$ $\arg z \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Q2) Soient z_1, z_2 et z_3 trois nombres complexes distincts ayant le même cube, c'est-à-dire $(z_1)^3 = (z_2)^3 = (z_3)^3$. Quelles sont les valeurs possibles de z_1, z_2 et z_3 ?

- A : $z_1 = 1; z_2 = i; z_3 = -i$
 B : $z_1 = 1; z_2 = \omega; z_3 = \omega^2$ où $\omega = e^{\frac{i2\pi}{3}}$
 C : $z_1 = 1; z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
 D : $z_1 = 2; z_2 = -1; z_3 = 1$
 E : $z_1 = 1; z_2 = -\omega; z_3 = -\omega^2$ où $\omega = e^{\frac{i2\pi}{3}}$

Q3) l'ensemble $\mathbb{C}$, si $z = \sqrt{5}e^{-i\frac{\pi}{8}}$, alors :

- A : $z = \frac{\sqrt{10+5\sqrt{2}}}{2} - \frac{i\sqrt{10-5\sqrt{2}}}{2}$
 B : $z = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \frac{i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
 C : $z = \frac{\sqrt{10+5\sqrt{2}}}{2} + \frac{i\sqrt{10-5\sqrt{2}}}{2}$
 D : $z = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \frac{i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
 E : $z = \frac{\sqrt{10+5\sqrt{2}}}{2} - \frac{i\sqrt{10+5\sqrt{2}}}{2}$

Q4) Le nombre complexe $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i\sqrt{3})\right)^{18}$ est égal à :

- A : $z = -512$ B : $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$ C : $z = 512$ D : $z = 251$ E : $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Q5) Pour $z \in \mathbb{C} - \{1\}$, l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$ est :

- A : La droite (Ox) privée du point $(1, 0)$
 B : La droite (Oy) privée du point $(0, 1)$
 C : Le cercle de centre O et de rayon 1
 D : La droite (Ox)
 E : Le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point $(1, 0)$

Q6) Dans $\mathbb{C}$, les solutions de l'équation $\frac{2z-1}{z+1} = z$ est :

- A : $\{-1, \frac{1}{2}\}$
 B : $\{1 + i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}\}$
 C : $\{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\}$
 D : $\{i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}\}$
 E : Autre réponse

Q7) Si $z = e^{-i\theta} - e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, \pi[$ alors $|z|$ est égal à :

- A : 2 B : $2\cos\theta$ C : $2\cos\frac{\theta}{2}$ D : $2\sin\theta$ E : $2\sin\frac{\theta}{2}$

Q8) Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ si $\arg(iz) \equiv \frac{7\pi}{6} [2\pi]$ et $|z| = \sqrt{2}$ alors la partie imaginaire de z^3 est égale à :

- A : 0 B : $2\sqrt{2}$ C : $\sqrt{2}$ D : $-\sqrt{2}$ E : $-2\sqrt{2}$

Q9) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

Soit z un nombre complexe et Ω, M et M' les points d'affixes respectivement $-\frac{\sqrt{3}}{3}, z$ et z' tel que :
 $z' = (1 + i\sqrt{3})z + i$, alors une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'})$ est :

A : $\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

B : $\frac{\pi}{3}[2\pi]$

C : $-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

D : $-\frac{\pi}{3}[2\pi]$

E : $\frac{\pi}{6}[2\pi]$

Q10) Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, si $|z| - z = 3 - i\sqrt{3}$, alors $|z|$ est égal à :

A : 0

B : 2

C : $2\sqrt{3}$

D : $3\sqrt{2}$

E : $7\sqrt{2}$

Q11) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

Soient A et B les points d'affixes respectives -1 et i .

L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\left| \frac{iz-1}{\bar{z}+i} \right| = 1$ est :

A : La médiatrice du segment $[AB]$

B : La droite (AB)

C : La droite (AB) privé du point B

D : Le cercle de diamètre $[AB]$

E : Le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point B

Q12) Le nombre complexe $\left(\frac{7-15i}{15+7i} \right)^{2021}$ est égal à :

A : i

B : -1

C : $7 - 15i$

D : $-i$

E : $7 + 15i$

Q13) Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, si $|z|\bar{z} = 15 - 20i$ alors $|(1+i)z|$ est égal à :

A : $\sqrt{2}$

B : $2\sqrt{2}$

C : $3\sqrt{2}$

D : $4\sqrt{2}$

E : $5\sqrt{2}$

Q14) Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, si $z = 1 + i(1 + \sqrt{2})$, alors :

A : $|z| = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}$ et $\arg z \equiv \frac{3\pi}{8}[2\pi]$

B : $|z| = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}$ et $\arg z \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$

C : $|z| = 2\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\arg z \equiv \frac{3\pi}{8}[2\pi]$

D : $|z| = 2\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\arg z \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$

E : $|z| = 2\cos\frac{\pi}{8}$ et $\arg z \equiv \frac{3\pi}{8}[2\pi]$

Q15) Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, si $|z_1| = |z_2|$ et $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$, alors $|z_1 + z_2|$ est égal à :

A : 1

B : 3

C : $\sqrt{3}$

D : 2

E : $\sqrt{2}$

Q16) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Soient z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation d'inconnue z

$$(E_\alpha) : z^2 - \sin(2\alpha)z + \sin^2(\alpha) = 0$$

La valeur de α pour laquelle les points O , $M(z_1)$ et $M(z_2)$ sont les sommets d'un triangle équilatéral est :

A : $\frac{\pi}{3}$

B : $\frac{\pi}{4}$

C : $\frac{\pi}{5}$

D : $\frac{\pi}{6}$

E : $\frac{\pi}{8}$

Q17) On pose $A = 1 + \cos(\frac{\pi}{5}) + \cos(\frac{2\pi}{5}) + \dots + \cos(\frac{9\pi}{5})$ et $B = \sin(\frac{\pi}{5}) + \sin(\frac{2\pi}{5}) + \dots + \sin(\frac{9\pi}{5})$
On considère le nombre complexe $z = A + iB$. Le nombre complexe z est égal à :

A : $z = 0$

B : $z = -2i$

C : $\frac{1}{2}$

D : $z = 2i$

E : Toutes les réponses proposées sont fausses

Q18) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Soit C le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.

A : L'affixe z_C du point C est $z_C = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

B : Le triangle ABC est équilatéral

C : Le module $|z_B - z_A| = \sqrt{2}$

D : Le triangle ABC est isocèle

E : L'affixe z_C du point C est $z_C = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Q19) Si z est le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{3}$ alors z^8 est égal à :

A : $8 + i8\sqrt{3}$

B : $-8 + i8\sqrt{3}$

C : $-8 - i8\sqrt{3}$

D : $8 - i8\sqrt{3}$

E : $4 + i4\sqrt{3}$

Q20) Si θ est un nombre réel, alors $\cos^3\theta$ est égal à :

A : $\frac{1}{8}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)$

B : $\frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)$

C : $\frac{1}{4}(\sin 3\theta + 3\sin\theta)$

D : $\frac{1}{8}(3\cos\theta - \cos 3\theta)$

E : $\frac{1}{8}(\sin 3\theta + 3\sin\theta)$

Q21) Si z est un nombre complexe tel que $\arg(z - 1) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ et $\arg(z + 1) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ alors z est égal à :

A : $i\sqrt{3}$

B : $2i\sqrt{3}$

C : $-i\sqrt{3}$

D : $-2i\sqrt{3}$

E : $1 + i\sqrt{3}$

Q22) Si $z = 1 + e^{i\frac{\theta}{2}}$ où $\theta \in]-\pi, \pi[$ alors $|z|$ est égal à :

A : 2

B : $2\cos\frac{\theta}{2}$

C : $2\cos\frac{\theta+\pi}{4}$

D : $\cos\frac{\theta+\pi}{4}$

E : $2\sin\frac{\theta}{4}$

Q23) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

L'ensemble des points M d'affixe z tel que : $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$ est :

A : L'axe des réels privé du point O

B : Le cercle de centre O et de rayon 1

C : L'axe des réels privé des points $A(-1)$ et $B(1)$

D : Le cercle de centre O et de rayon 1 privé des points $A(-1)$ et $B(1)$

E : L'axe des réels privé du point O union Le cercle de centre O et de rayon 1

Q24)

A : La partie réelle de $(1 - i)^5$ est $\sqrt{2}$

B : La partie imaginaire de $(1 + i)^{20}$ est 42

C : $(1 + i)^{20}$ est réel

D : L'équation $z^4 - 1 = 0$ possède une et une solution dans $\mathbb{C}$

E : L'équation $z^4 - 1 = 0$ possède trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

La géométrie dans l'espace

Q1) Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points $A(0, 3, 1)$, $B(-1, 3, 0)$ et $C(0, 5, 0)$. La sphère (S) a pour équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 5 = 0$. Quelles sont les coordonnées du point de tangence H du plan ABC et de la sphère (S)?

A : $H(2, 2, \sqrt{5})$

B : $H(2, 3, 1)$

C : $H(2, 2, 1)$

D : $H(0, 1, 2)$

E : $H(0, -1, 2)$

Q2) Soient (P) et (P') deux plans d'équations $P : x - y - z + 2 = 0$; $P' : x + z - 2 = 0$ respectivement et

(Δ) la droite telle que $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

A : $(\Delta) \subset P$

B : $(\Delta) \perp P$

C : $(\Delta) \cap P = \emptyset$

D : $(\Delta) \cap P' = \emptyset$

E : $(\Delta) \perp P'$

Q3) Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère les deux points $A(1, 2, 3)$ et $B(2, 0, 1)$. L'ensemble des points $M(x, y, z)$ équidistants des points A et B est :

A : Le plan : $x + y + z = 6$

B : Le plan : $2x - 4y - 4z = -9$

C : Le plan : $2x - 4y - 4z = 9$

D : La droite : $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - 4y - 4z = -9 \end{cases}$

E : Autre réponse

Q4) Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(-1, 2, 0)$, $B(3, 0, 4)$ et $C(-2, 1, 2)$.

A : La surface du triangle ABC est $5\sqrt{2}$

B : La surface du triangle ABC est $5\sqrt{3}$
 C : La longueur de la hauteur issue de A dans le triangle ABC est $\sqrt{5}$
 D : La longueur de la hauteur issue de A dans le triangle ABC est $\sqrt{6}$
 E : Les points A, B et C sont alignés

Q5) Dans un repère orthonormé, on considère le plan (P) d'équation $x + 2y - z = 3$ et le plan (P') d'équation $3x + 2y + z = 5$. On pose $z = t$, parmi les propositions suivantes, quelle est la représentation paramétrique de la droite (Δ) intersection de (P) et (P')?

A : (Δ) : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ B : (Δ) : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ C : (Δ) : $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Dénombrement et Probabilité

Q1) On suppose que 2000 personnes ont envoyé un SMS dans le cadre d'un mini jeu télé qui consistait à répondre à une question à deux choix. La société qui gère ce jeu-SMS sélectionne 30 SMS au hasard parmi les 2000. On note Ω l'ensemble de tous les sous-ensembles de 30 SMS (distincts). Combien d'éléments contient-il ?

A : A_{2000}^{30} B : C_{2000}^{30} C : 1970 D : $\frac{2000!}{30!}$ E : 2000

Q2) On considère maintenant que vous faites partie des personnes qui ont envoyés un SMS. Quelle est la probabilité que vous soyez sélectionnés parmi les 2000 participants ?

A : 0.12 B : 0.03 C : 0.015 D : 0.02 E : 0.1

Q3) Soit une urne qui contient 5 boules bleues, 4 boules blanches, 3 boules noires. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules au hasard de l'urne. On répète cette expérience n fois de suite ($n \geq 5$) en remettant dans l'urne les boules tirées après chaque tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules de couleur 2 à 2 distinctes $(n - 1)$ fois exactement ?

A : $\frac{8 \times 3^n}{11^n}$ B : $\frac{8n \times 3^n}{11^n}$ C : $\frac{8n \times 3^{n-1}}{11^n}$ D : $\frac{8^n \times 3^{n-1}}{11^n}$ E : $\frac{8 \times 3^n}{11^{n-1}}$

Q4) Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère le plan (P) d'équation $3x - 2z + 3 = 0$. On dispose d'un dé régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On lance le dé et on obtient ainsi de manière équiprobable un nombre a ($1 \leq a \leq 6$).

La probabilité que le point $A(a^2, 2a, 6a - 3)$ appartienne au plan (P) est :

A : $\frac{1}{6}$ B : $\frac{1}{3}$ C : $\frac{1}{2}$ D : $\frac{2}{3}$ E : Autre réponse.

Q5) Une urne contient 5 boules rouges, 3 boules noires et une boule blanche. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire 3 boules de l'urne simultanément. Calculer les probabilités suivantes P_A et P_B des événements : [0.5em]

A : « Deux boules au moins sont rouges ».

B : « Deux boules au moins ayant la même couleur ».

Choisir les bonnes réponses parmi les valeurs données au tableau suivant :

1	$\frac{5}{28}$	$\frac{16}{84}$	$\frac{50}{84}$	$\frac{23}{28}$	$\frac{26}{42}$	1
---	----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	---

Les fonctions numériques

Q1) On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - \frac{(\ln x)^2}{x}$.

A : $f'(x) = 1 + \frac{2(\ln x) - (\ln x)^2}{x^2}$

B : $f'(x) = 1 - \frac{2(\ln x) - (\ln x)^2}{x^2}$

C : $f'(x) = -1 + \frac{2(\ln x) - (\ln x)^2}{x^2}$

D : $f'(x) = -1 - \frac{2(\ln x) - (\ln x)^2}{x^2}$

E : $f'(x) = 1 + \frac{2(\ln x) + (\ln x)^2}{x^2}$

Q2) La fonction $f : x \mapsto f(x) = 2\ln\left(\frac{e^x+2}{\sqrt{1+e^x}}\right)$ admet une asymptote horizontale ou oblique lorsque x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$. Quelle est l'équation de cette asymptote ? 0.3 cm

A : $y = 2x$

B : $y = x$

C : $y = 0$

D : $y = -2\ln 2$

E : $y = -2x$

Q3) On considère la fonction g définie par : $g(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$; déterminer le point x_0 où la tangente à C_g est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

A : $x_0 = 0$

B : $x_0 = -1$

C : $x_0 = 1$

D : $x_0 = 2$

E : $x_0 = \emptyset$ (Ensemble vide)

Q4) Soit $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Quelle est la bonne réponse ?

A : $D_f =]0, +\infty[$

B : $D_f = \mathbb{R}^*$

C : $D_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

D : $D_f =]-1, 1[$

E : $D_f = [-1, 1]$

Q6) Soit $f(x) = x \sin(\pi x) - \ln(x) - 1$ définie sur $]0, 1]$. Quelle est la bonne réponse ?

A : f est majorée

B : Il existe $c \in]0, 1]$ tel que $f(c) = 0$

C : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

D : f est croissante

E : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$

Q7) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}\sqrt{x}}$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ est égale à :

- A : $+\infty$ B : 0 C : 1 D : $\frac{1}{2}$ E : f n'admet pas de limite en 0^+

Q8) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{++}$ par : $g(x) = \frac{(2x)^x}{(x)^{2x}}$, pour tout $x > 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ est égale à :

- A : $+\infty$ B : 1 C : 2 D : 0 E : f n'admet pas de limite en $+\infty$

Q9) f est une fonction réelle, sachant que $f(1) = 3$ et $f'(1) = -3$. La courbe de la fonction f admet au point $(1, 3)$ une tangente d'équation :

- A : $y = 3x - 2$ B : $y = 3x - 6$ C : $y = -3x + 6$ D : $y = 3x$ E : $y = -3x + 2$

Q10) Soit f et g deux fonctions réelles telles que : $f(x) = \ln(x-1)$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$. Le domaine de définition de $g \circ f$ est :

- A : $[-1, +\infty[$ B : $]1, +\infty[$ C : $[1 + \frac{1}{e}, +\infty[$ D : $]e, +\infty[$ E : $] - e, +\infty[$

Q11) Soit
$$\begin{cases} f(x) = x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right); & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$$

- A : f n'est pas dérivable en 0 B : $f'(0) = 0$
 C : $f'(0) = 1$
 D : Pour $x \neq 0$, $f(x) = 1 + 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right)$
 E : f est dérivable en 0 et $f'(0) = 2$

Q12) Soit f une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$.

Si $(\forall x \in \mathbb{R}); f(2x-1) = x^2 + 3x$ alors $f(1) + f'(1)$ est égal à :

- A : $\frac{5}{2}$ B : 4 C : $\frac{9}{2}$ D : $\frac{13}{2}$ E : Autre réponse

Q13) Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

L'équation réduite de la tangente à (C) au point d'abscisse 1 est :

- A : $y = \frac{n(n+1)}{2}x - \frac{(n-2)(n+1)}{2}$
 B : $y = \frac{n(n-1)}{2}x - \frac{(n-2)(n+1)}{2}$
 C : $y = \frac{n(n+1)}{2}x + \frac{(n-2)(n+1)}{2}$
 D : $y = \frac{n(n-1)}{2}x - \frac{n^2-1}{2}$
 E : $y = \frac{n(n+1)}{2}x + \frac{n^2-1}{2}$

Q14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\ln(e+x)} - 1}{\sqrt{x+1} - 1}$ est égale à :

A : $\frac{1}{2e}$

B : $\frac{1}{e}$

C : 1

D : e

E : $2e$

Q15) Si $f(x) = \frac{1}{1-x} \ln(1 + \frac{1}{x})$, alors $f'(x)$ est égale à :

A : $\frac{1}{(1-x)^2} \ln(1 + \frac{1}{x}) + \frac{1}{x(1-x^2)}$

B : $\frac{1}{(1-x)^2} \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x(1-x^2)}$

C : $\frac{1}{1-x^2} \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x(1-x^2)}$

D : $\frac{1}{(1-x)^2} \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x(1-x)}$

E : $\frac{1}{(1-x)^2} \ln(1 + \frac{1}{x}) + \frac{1}{(1-x^2)}$

Q16) Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x}$, alors :

A : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

B : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

C : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

D : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$

E : La fonction f n'admet pas de limite en 0

Q17) Si $f(1) = 4$ et $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; f'(x) = 2x + \ln x$ alors $f(e)$ est égal à :

A : e^2

B : $e + 4$

C : $e^2 + 4$

D : e

E : 4

Q18) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x+1}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

La fonction f est dérivable en 0 si, et seulement si :

A : $a = 1$ $b = 1$

B : $a = -1$ $b = 1$

C : $a = 2$ $b = 1$

D : $a = -1$ $b = -1$

E : $a = -1$ $b = 0$

Q19) Dans $\mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $x^5 + x - 1 = 0$ est :

A : 0

B : 1

C : 2

D : 3

E : 5

Q20) Si $f(x) = (x^2 - x)e^{\frac{1}{x}}$ alors $f'(x)$ est égale à :

A : $(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$

B : $(1 - \frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}$

$$C : \left(\frac{1}{x} - 1\right)e^{\frac{1}{x}}$$

$$D : \left(2x - 2 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$$

$$E : \left(2x - \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$$

Q21 Le domaine de définition de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x-1} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ est :

$$A :] - \infty, -1[\cup] 0, +\infty[$$

$$B :] - 1, 1[\cup] 1, +\infty[$$

$$C :] - \infty, -1[\cup] 1, +\infty[$$

$$D :] - \infty, -1[\cup] 0, 1[\cup] 1, +\infty[$$

$$E :] - 1, 1[$$

Q22) Si $(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) = (x-5)(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)$ alors $f'(1)$ est égale à :

$$A : 24 \quad B : 1 \quad C : 0 \quad D : 5 \quad E : -24$$

Q23) Soit $a \in]0, +\infty[$ et f la fonction définie par : $f(x) = 1 + x \ln \sqrt{1 + \frac{a}{x}}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ est égale à :

$$A : 1 \quad B : 1 + \frac{a}{2} \quad C : 1 + a \quad D : +\infty \quad E : a$$

Q24) Si $(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) = x^3 + 3 \ln x + 1$ alors le nombre dérivé $(f^{-1})'(2)$ est égal à :

$$A : \frac{1}{3} \quad B : \frac{1}{6} \quad C : \frac{1}{5} \quad D : \frac{1}{4} \quad E : \frac{1}{2}$$

Q25) On considère la fonction f définie par : $(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.
Un encadrement de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$ est :

$$A : 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$B : -\frac{1}{\sqrt{e}} \leq f'(x) \leq 0$$

$$C : -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$$

$$D : 0 \leq f'(x) \leq \sqrt{e}$$

$$E : -\frac{1}{\sqrt{e}} \leq f'(x) \leq -\frac{1}{2}$$

Q26) Soit $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 + 3} - ax \sqrt{x+b}$ avec a et b deux réels donnés.
 f admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si :

$$A : a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$B : a = 1 \text{ et } b > 0$$

$$C : a = 1 \text{ et } b = 1$$

$$D : a = 1 \text{ et } b = 0$$

$$E : a > 0 \text{ et } b = 0$$

Q27) Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 2\ln(x^2 - 2x + 2)$.

- A : Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}^+$
B : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
C : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
D : $f''(x) = \frac{x(4-x)}{(x-1)^2+1}$
E : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln 2$

Q28) si une fonction f est définie en a alors nécessairement :

- A : f est continue en a
B : $\ln(f)$ est définie en a
C : $\frac{1}{f}$ est définie en a
D : $\frac{1}{e^f}$ est définie en a
E : Toutes les propositions sont fausses.

Q29) quand On considère la fonction f_n définie pour tout $x \in [0, +\infty[$ par : $f_n(x) = nxe^{-nx}$ avec n un entier naturel supérieur ou égal à 1 $n \geq 1$.

- A : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$
B : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\infty$
C : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = n$
D : $f'_n(x) = ne^{-nx}(nx - 1)$
E : Toutes les propositions sont fausses.

Primitives et intégrales

Q1) Calculer l'intégrale suivante : $\int \frac{\cos x}{2 + \sin x} dx$

- A : $\frac{1}{2} \ln|2 + \sin x| + C$
B : $\ln|2 + \sin x| + C$
C : $-\ln|2 + \sin x| + C$
D : $\ln|2 + \cos x| + C$
E : $\frac{1}{2} \ln|2 + \cos x| + C$

Q2) L'intégrale $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x \tan x} dx$ est égale à :

- A : $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ B : $2 - \sqrt{2}$ C : $\sqrt{2} - 2$ D : $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$ E : $1 - \sqrt{2}$

Q3) L'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx$ est égale à :

- A : 0 B : $\ln(2) + 1$ C : $\ln(2)$ D : 1 E : $-\ln(2)$.

Q4) Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Si $\int_0^1 \frac{e^{ax}}{1+e^{ax}} dx = \frac{1}{a}$ alors a est égal à :

- A : $\ln(e-1)$ B : $2e-1$ C : $\ln(2e+1)$ D : $\ln(2e-1)$ E : $2e+1$

Q5) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^{3x} - 6$.

La primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3 est définie par :

- A : $F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} - 6x - \frac{2}{3}$
B : $F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} - 6x + \frac{2}{3}$
C : $F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} - 6x - \frac{2}{3}$
D : $F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} - 6x + \frac{2}{3}$
E : autre réponse

Q6) L'intégrale $\int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+6x+4}} dx$ est égale à :

- A : $\frac{1}{3}$ B : $\frac{8}{3}$ C : $\frac{10}{3}$ D : $\frac{14}{3}$ E : Autre réponse

Q7) Si pour tout entier naturel n , $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$ alors $(\forall n \in \mathbb{N} : 2I_{n+1} + (n+1)I_n)$ est égal à :

- A : e B : e^2 C : 1 D : $\frac{e-1}{2}$ E : $\frac{e+1}{2}$

Q8) L'intégrale $\int_0^1 \frac{x}{1+e^{-x^2}} dx$ est égale à :

- A : $\sqrt{\ln(\frac{1+e}{2})}$ B : $\ln \sqrt{1+e}$ C : $\ln(1+e)$ D : $\ln \sqrt{\frac{1+e}{2}}$ E : $\sqrt{\ln(1+e)}$

Q9) Si $\int_1^2 f'(x)f''(x) dx = 8$ et $f'(2) - f'(1) = 2$, alors $f'(2) + f'(1)$ est égal à :

- A : 4 B : 6 C : 8 D : 10 E : 12

Q10) L'intégrale $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ est égale à :

- A : $\frac{\pi}{3}$ B : $\frac{\pi}{4}$ C : $\frac{\pi}{6}$ D : $\frac{\pi}{8}$ E : $\frac{\pi}{12}$

Q11) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

Si $\int_{-1}^1 f(x) dx < 2$, alors le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$ est :

- A : 0 B : 1 C : 2 D : 3 E : 4

Q12) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2\ln x}{x(1+(\ln x)^2)}$.

La primitive de f sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 est :

- A : $x \mapsto \ln((\ln x)^2 + 1)$
 B : $x \mapsto (\ln x)^2$
 C : $x \mapsto 2\ln((\ln x)^2 + 1)$
 D : $x \mapsto \frac{x \ln x}{\ln x + 1}$
 E : $x \mapsto \frac{2 \ln x}{(\ln x)^2 + 1}$

Q13) L'intégrale $\int_0^1 \frac{2t+3}{t+2} dt$ est égale à :

- A : $\ln \frac{3}{2}$ B : $2 + \ln \frac{3}{2}$ C : $2 - \ln \frac{2}{3}$ D : $2 + \ln \frac{2}{3}$ E : $\ln \frac{2}{3}$

Q14) L'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x e^x dx$ est égale à :

- A : $\frac{1+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ B : $\frac{e+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ C : $\frac{1-e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ D : $1 + e^{\frac{\pi}{2}}$ E : $1 - e^{\frac{\pi}{2}}$

Equations Différentielles

Q1) Si f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 4y = 0$, alors la fonction $g = 2f$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

- A : $y'' + 2y' + 4y = 0$
 B : $y'' + y' + y = 0$
 C : $y'' + 4y' + 4y = 0$
 D : $2y'' + 4y' + y = 0$
 E : Autre réponse

Divers

Q1) $ABCD$ est un carré de côté 1.

On place les points E et F respectivement sur les côtés $[AB]$ et $[BC]$ tels que $BE = CF = x$

La valeur de x pour laquelle l'aire du triangle EFD est minimale est :

- A : 0 B : $\frac{1}{4}$ C : $\frac{1}{3}$ D : $\frac{1}{2}$ E : Autre réponse

Q2) Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AB = AC = 10$.

L'aire maximale du triangle ABC est :

- A : $25 \frac{\sqrt{2}}{2}$ B : 50 C : 100 D : 10 E : $5\sqrt{2}$