

Corrigé de l'épreuve de mathématiques

Session de rattrapage 2025

Biof SMA - Biof SMB

S. EL JAAFARI

Exercice 1

Partie I :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$ par : $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{x^2 \ln x}{x^2 + 1}$ si $x \in]0, +\infty[$.
Et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.a. Étudier la continuité de f à droite en 0.

On a $f(0) = 0$ et $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 1 = 1 \end{cases}$, alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \ln x}{x^2 + 1} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$. Par conséquent

la fonction f est continue à droite en 0.

1.b. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Soit $x > 0$ on a : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x^2 \ln x}{x^2 + 1} - 0}{x} = \frac{x^2 \ln x}{x^3 + x} = \frac{x \ln x}{x^2 + 1}$, et comme $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 1 = 1 \end{cases}$,

alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x^2 + 1} = 0$ d'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$. Par conséquent la fonction f est dérivable à droite en 0, et on a : $f'_d(0) = 0$.

Par suite la courbe (C) admet une demi-tangente horizontale à droite à l'origine O du repère.

1.c. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

• On a : $\begin{cases} (\forall x \in]0, +\infty[), f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} \times \ln x \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} \times \ln x = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Par conséquent $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

• On a : $\begin{cases} (\forall x \in]0, +\infty[), \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{x^2 + 1} \times \frac{\ln x}{x} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} \times \frac{\ln x}{x} = 0$. Par conséquent $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

• On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction asymptotique l'axe des abscisses.

2. Soit φ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $\varphi(x) = x^2 + 1 + 2 \ln x$.

2.a. Dresser le tableau de variations de φ .

Les fonctions $x \mapsto x^2 + 1$ et $x \mapsto 2 \ln x$ sont strictement croissantes sur $]0, +\infty[$ alors la fonction φ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ comme somme des deux fonctions citées, et on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$; . D'où le tableau de variation de la fonction φ sur $]0, +\infty[$ est :

x	0	$+\infty$
$\varphi(x)$	$-\infty$	$+\infty$

- 2.b. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β appartenant à l'intervalle $]\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}[$.
(On donne $\ln 2 \simeq 0.7$ et $\ln 3 \simeq 1.1$)

Puisque φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors elle est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, en plus on a $\varphi(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 + 1 + 2\ln(\frac{1}{2}) \simeq 0.25 + 1 - 1.4 \simeq -0.15$, et on a $\varphi(\frac{1}{\sqrt{3}}) = (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 1 + 2\ln(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{3} + 1 - \ln 3 \simeq 0.33 + 1 - 1.1 \simeq 0.23$, d'où $\varphi(\frac{1}{2}) \times \varphi(\frac{1}{\sqrt{3}}) < 0$, alors d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (TVI) l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β appartenant à l'intervalle $]\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}[$.

- 2.c. Montrer que $f(\beta) = -\frac{\beta^2}{2}$.

On a $\varphi(\beta) = 0 \Leftrightarrow \beta^2 + 1 + 2\ln(\beta) = 0 \Leftrightarrow \ln(\beta) = -\frac{1+\beta^2}{2}$, d'où $f(\beta) = \frac{\beta^2 \ln(\beta)}{\beta^2 + 1} = \frac{\beta^2 (-\frac{1+\beta^2}{2})}{\beta^2 + 1} = -\frac{\beta^2}{2}$.

- 3.a. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \frac{x\varphi(x)}{(x^2+1)^2}$.

On a $(\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \times \ln(x)$.

Puisque les fonctions $x \mapsto \frac{x^2}{x^2+1}$ et $x \mapsto \ln x$ sont dérivables sur $]0, +\infty[$, la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit de ses deux fonctions.

Soit $x \in]0, +\infty[, f'(x) = (\frac{x^2}{x^2+1} \times \ln(x))' = (\frac{x^2}{x^2+1})' \times \ln x + \frac{x^2}{x^2+1} \times (\ln x)' = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \times \ln x + \frac{x}{x^2+1} = \frac{2x \ln x + x(x^2+1)}{(x^2+1)^2} =$

$$\frac{x(2\ln x + x^2 + 1)}{(x^2+1)^2} = \frac{x\varphi(x)}{(x^2+1)^2}.$$

- 3.b. Donner le tableau de variations de f .

Puisque la fonction φ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et β est l'unique réel tel que $\varphi(\beta) = 0$, alors $(\forall x \in]0, \beta], \varphi(x) \leq 0$ et $(\forall x \in [\beta, +\infty[, \varphi(x) \geq 0$ d'où $(\forall x \in]0, \beta], f'(x) \leq 0$ et $(\forall x \in [\beta, +\infty[, f'(x) \geq 0$. Par conséquent, le tableau de variations de la fonction f est :

x	0	β	$+\infty$
$\varphi(x)$		-	+
$f'(x)$	0	-	+
$f(x)$	0	$f(\beta) = -\frac{\beta^2}{2}$	$+\infty$

- 3.c. Montrer que $\frac{1}{\beta}$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ sur $[\beta, +\infty[$.

D'après la question (I-3.b) la fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[\beta, +\infty[$ et $f([\beta, +\infty[) = [-\frac{\beta^2}{2}, +\infty[$ et puisque $\frac{1}{2} \in [-\frac{\beta^2}{2}, +\infty[$, alors d'après le théorème de la bijection

l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution dans $]\beta, +\infty[$.

On a : $f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 \times \frac{\ln\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 + 1} = \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 \times \frac{-\ln(\beta)}{\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 + 1} = \frac{-\ln\beta}{\beta^2 + 1}$.

Or on a $\varphi(\beta) = 0 \Leftrightarrow \beta^2 + 1 + 2\ln(\beta) = 0 \Leftrightarrow \ln\beta = -\frac{\beta^2 + 1}{2}$. Alors $f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{-\ln\beta}{\beta^2 + 1} = \frac{-\frac{\beta^2 + 1}{2}}{\beta^2 + 1} = \frac{1}{2}$. Donc $f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{2}$, par conséquent $\frac{1}{\beta}$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ sur $]\beta, +\infty[$.

- 3.d. Montrer que la droite d'équation $y = \beta x - \frac{1}{2}$ est la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $\frac{1}{\beta}$.

L'équation de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $\frac{1}{\beta}$ est : $y = f'\left(\frac{1}{\beta}\right)\left(x - \frac{1}{\beta}\right) + f\left(\frac{1}{\beta}\right)$.

Or $f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{2}$ et $f'\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{\frac{1}{\beta} \times \varphi\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\left(\frac{1}{\beta^2} + 1\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\beta^2} + 1 - 2\ln(\beta)\right)}{\left(\frac{1}{\beta^2} + 1\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\beta^2} + 1 + \beta^2 + 1\right)}{\left(\frac{1}{\beta^2} + 1\right)^2} = \beta \times \frac{\left(\frac{1}{\beta} + \beta\right)^2}{\left(\frac{1}{\beta^2} + 1\right)^2} = \beta$ c-à-d $f'\left(\frac{1}{\beta}\right) = \beta$.

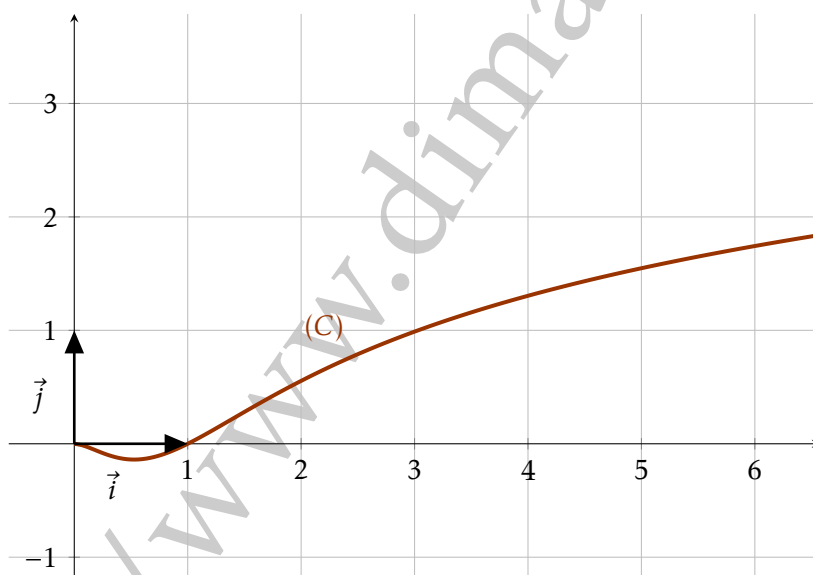
Alors $y = f'\left(\frac{1}{\beta}\right)\left(x - \frac{1}{\beta}\right) + f\left(\frac{1}{\beta}\right) \Leftrightarrow y = \beta\left(x - \frac{1}{\beta}\right) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \beta x - 1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \beta x - \frac{1}{2}$.

Par conséquent la droite d'équation $y = \beta x - \frac{1}{2}$ est la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $\frac{1}{\beta}$.

4. Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(On admet que la courbe (C) possède deux points d'inflexion)

Courbe (C) :



Partie II :

On pose $J =]\sqrt{3}, 2[$ et $\alpha = \frac{1}{\beta}$

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{e^{1+\frac{1}{x^2}}}$.

- 1.a. Étudier les variations de g .

La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a : $g'(x) = \frac{(e^{1+\frac{1}{x^2}})' }{2\sqrt{e^{1+\frac{1}{x^2}}}} = \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)' e^{1+\frac{1}{x^2}}}{2\sqrt{e^{1+\frac{1}{x^2}}}} = -\frac{\frac{2}{x^3} e^{1+\frac{1}{x^2}}}{2\sqrt{e^{1+\frac{1}{x^2}}}} = -\frac{e^{1+\frac{1}{x^2}}}{x^3 \sqrt{e^{1+\frac{1}{x^2}}}}$,

donc $(\forall x \in J), g'(x) = -\frac{\sqrt{e^{1+\frac{1}{x^2}}}}{x^3}$. Et on a $\forall x > 0, \frac{\sqrt{e^{1+\frac{1}{x^2}}}}{x^3} > 0$, d'où $\forall x > 0, g'(x) < 0$.

Par conséquent la fonction g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

- 1.b. Montrer que $(\forall x \in J), \sqrt{3} < g(x) < 2$.

(On donne $\sqrt{3} \simeq 1.73, e^{\frac{5}{3}} \simeq 1.95$ et $e^{\frac{5}{8}} \simeq 1.87$)

Puisque la fonction g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, Soit $x \in J$ donc $\sqrt{3} < x < 2$ alors $g(2) < g(x) < g(\sqrt{3})$; or $g(2) = \sqrt{e^{1+\frac{1}{4}}} = \sqrt{e^{\frac{5}{4}}} = e^{\frac{5}{8}} \simeq 1.87$, et $g(\sqrt{3}) = \sqrt{e^{1+\frac{1}{3}}} = \sqrt{e^{\frac{4}{3}}} = e^{\frac{2}{3}} \simeq 1.95$. D'où $\sqrt{3} < 1.87 < g(x) < 1.95 < 2$. Par conséquent $(\forall x \in J), \sqrt{3} < g(x) < 2$.

- 2.a. En utilisant le résultat de la question I-3.c., montrer que : $g(\alpha) = \alpha$.

D'après la question (I-3.c.) on a : $f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta^2} \times \frac{\ln\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + \beta^2 = -2\ln\beta$. Alors

$$g(\alpha) = \sqrt{e^{1+\frac{1}{\alpha^2}}} = \sqrt{e^{1+\beta^2}} = \sqrt{e^{-2\ln\beta}} = \sqrt{\frac{1}{e^{\ln\beta^2}}} = \sqrt{\frac{1}{\beta^2}} = \frac{1}{\beta} = \alpha. \quad (\text{car } \beta > 0)$$

2.b. **Montrer que :** $(\forall x \in J), \quad |g'(x)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}.$

D'après la question (II - 1.a.) on a : $(\forall x \in J), \quad g'(x) = -\frac{\sqrt{e^{1+\frac{1}{x^2}}}}{x^3}.$ Donc $(\forall x \in J), \quad g'(x) = -\frac{g(x)}{x^3},$ D'où $|g'(x)| = \frac{g(x)}{x^3}.$

Puisque $(\forall x \in J), \quad \begin{cases} \sqrt{3} < g(x) < 2 \\ 3\sqrt{3} < x^3 < 8 \end{cases},$ alors $\frac{\sqrt{3}}{8} < \frac{g(x)}{x^3} < \frac{2}{3\sqrt{3}},$ d'où $\frac{\sqrt{3}}{8} < |g'(x)| < \frac{2}{3\sqrt{3}}.$

Par conséquent $(\forall x \in J), \quad |g'(x)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}.$

2.c. **En déduire que :** $(\forall x \in J), \quad |g(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}|x - \alpha|.$

Puisque $\frac{1}{\beta} < \frac{1}{\sqrt{3}} < 1 < \sqrt{3},$ alors $(\forall x \in J), \quad \alpha < x.$

Soit $x \in J, \quad \begin{cases} g \text{ est continue sur }]0, +\infty[\Rightarrow g \text{ est continue sur } [\alpha, x] \\ g \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[, \Rightarrow g \text{ est dérivable sur }]\alpha, x[\\ (\forall t \in [\alpha, x]), \quad |g'(t)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}. \end{cases}$

Alors, d'après le théorème des inégalités des accroissements finis sur l'intervalle $[\alpha, x],$ on a $|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}|x - \alpha|.$

Par conséquent, $(\forall x \in J), \quad |g(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}|x - \alpha| \quad (\text{Car } g(\alpha) = \alpha).$

3. **On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :** $x_0 = \frac{7}{4}$ **et pour tout $n \in \mathbb{N},$ $x_{n+1} = g(x_n).$**

3.a. **Montrer que :** $(\forall n \in \mathbb{N}), \quad x_n \in J.$

Raisonnons par récurrence sur $n.$

- Initialisation : Pour $n = 0$ on a $x_0 = \frac{7}{4};$ et comme $\sqrt{3} < \frac{7}{4} < 2$ alors $x_0 \in J.$

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $x_n \in J,$ et montrons que $x_{n+1} \in J.$

Démonstration : D'après (HR) on a $x_n \in J$ donc $\sqrt{3} < x_n < 2$ or $(\forall x \in J), \quad g(x) \in J,$ donc $g(x_n) \in J.$

Par conséquent $x_{n+1} \in J.$

- Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}), \quad x_n \in J.$

3.b. **Montrer par récurrence que :** $(\forall n \in \mathbb{N}), \quad |x_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha|.$

Raisonnons par récurrence sur $n.$

- Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $|x_0 - \alpha| \leq |x_0 - \alpha|,$ donc la proposition est vraie pour $n = 0.$

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N},$ supposons que $|x_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha|,$

et montrons que $|x_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{n+1} |x_0 - \alpha|.$

Démonstration : D'après les questions II - 2.c. et II - 3.a. on a : $\begin{cases} (\forall x \in J), \quad |g(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}|x - \alpha| \\ (\forall n \in \mathbb{N}), \quad x_n \in J \end{cases}$

alors $(\forall n \in \mathbb{N}), \quad |g(x_n) - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}|x_n - \alpha|$ donc $(\forall n \in \mathbb{N}), \quad |x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}|x_n - \alpha|.$ et d'après (HR), On

a : $|x_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha|,$ alors $|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \times \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha|.$ D'où $|x_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{n+1} |x_0 - \alpha|.$

- Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}), \quad |x_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha|.$

3.c. **En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\alpha.$**

On a $2 < 3\sqrt{3} \Rightarrow 0 < \frac{2}{3\sqrt{3}} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n - \alpha| = 0,$

donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\alpha.$

Exercice 2

On considère la suite numérique $(U_n)_{n \geq 2}$ définie par : $(\forall n \geq 2), U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1.a. Montrer que pour tout entier $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ et pour tout réel $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ on a :

$$\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \ln(x) \leq \ln\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

On sait que la fonction $\ln$ est croissante sur $]0, +\infty[$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$ on a $\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \frac{k}{n} > 0$.

Soit $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, on a $\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}$, donc $\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \ln(x) \leq \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

Par conséquent $(\forall x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]), \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \ln(x) \leq \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

1.b. En déduire que : $\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

Soit $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ On a $\frac{k}{n} < \frac{k+1}{n}$ et la fonction $\ln$ est continue sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$

et $\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \ln(x) \leq \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$, alors en intégrant on obtient $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln\left(\frac{k}{n}\right) dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right) dx$

donc $\ln\left(\frac{k}{n}\right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \ln\left(\frac{k+1}{n}\right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dx$ donc $\frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$. D'où

$\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

2.a. Montrer que : $\forall n \geq 2, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right)$.

D'après la question précédente, on a : $\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$,

en appliquant des sommes terme à terme on obtient : $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$

★) On a $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$.

★) En appliquant la relation de Chasles sur les intégrales, on obtient : $\sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx$.

★) En posant $k' = k + 1$, on obtient $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right) = \sum_{k'=2}^n \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k'}{n}\right) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$

D'où $\forall n \geq 2, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right)$.

2.b. En déduire que : $U_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx \leq U_n - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$.

On a : $\sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right) - \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right) - \ln\left(\frac{1}{n}\right)$, d'où $\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) = U_n - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$.

Par conséquent $U_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx \leq U_n - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$

2.c. Montrer que : $-1 + \frac{1}{n} \leq U_n \leq -1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$.

D'après la question précédente, on a : $U_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx \leq U_n - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$ donc

$\int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx + \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) \leq U_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx$. Or $\int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx = [x \ln x - x]_{\frac{1}{n}}^1 = 0 - 1 - \left(\frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) = -1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$.

Par conséquent $-1 + \frac{1}{n} \leq U_n \leq -1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$

2.d. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

On a : $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -1 + \frac{1}{n} = -1 \end{cases}$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -1$. Alors, d'après le théorème

Exercice 3

Soit $\theta \in [0, \pi[$

Partie I :

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) d'inconnue z

$$(E_\theta) : z^2 + (1-i)e^{i\theta}z - ie^{i2\theta} = 0$$

1.a. Vérifier que : $(E_\theta) \Leftrightarrow \left(2z + (1-i)e^{i\theta}\right)^2 = \left((1+i)e^{i\theta}\right)^2$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \left(2z + (1-i)e^{i\theta}\right)^2 &= \left((1+i)e^{i\theta}\right)^2 \Leftrightarrow \left(2z + (1-i)e^{i\theta}\right)^2 - \left((1+i)e^{i\theta}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ 4z^2 + 4(1-i)e^{i\theta}z + (1-i)^2e^{2i\theta} - (1+i)^2e^{2i\theta} &= 0 \Leftrightarrow 4z^2 + 4(1-i)e^{i\theta}z - 2ie^{2i\theta} - 2ie^{i\theta} = 0 \Leftrightarrow \\ 4\left(z^2 + (1-i)e^{i\theta}z - ie^{i2\theta}\right) &= 0 \Leftrightarrow z^2 + (1-i)e^{i\theta}z - ie^{i2\theta} = 0 \Leftrightarrow (E_\theta). \end{aligned}$$

$$\text{D'où } (E_\theta) \Leftrightarrow \left(2z + (1-i)e^{i\theta}\right)^2 = \left((1+i)e^{i\theta}\right)^2.$$

1.b. En déduire les deux solutions z_1 et z_2 de l'équation (E_θ) avec $\text{Im}(z_1) \leq 0$.

$$\begin{aligned} (E_\theta) \Leftrightarrow \left(2z + (1-i)e^{i\theta}\right)^2 &= \left((1+i)e^{i\theta}\right)^2 \Leftrightarrow 2z + (1-i)e^{i\theta} = (1+i)e^{i\theta} \text{ ou } 2z + (1-i)e^{i\theta} = -(1+i)e^{i\theta} \Leftrightarrow z = ie^{i\theta} \\ \text{ou } z &= -e^{i\theta}. \text{ Or } \begin{cases} \diamond z = ie^{i\theta} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = \cos\theta. \\ \diamond z = -e^{i\theta} = -\cos\theta - i\sin\theta \Leftrightarrow \text{Im}(z) = -\sin\theta \end{cases}, \text{ et puisque } \theta \in]0, \pi[, \text{ alors } \\ -\sin\theta < 0, \text{ par conséquent } z_1 &= -e^{i\theta} \text{ et } z_2 = ie^{i\theta}. \end{aligned}$$

2.a. Montrer que : $\frac{z_1+1}{z_2+i} = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

$$\text{On a : } \frac{z_1+1}{z_2+i} = \frac{1-e^{i\theta}}{i(1+e^{i\theta})} = \frac{-e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}})}{ie^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}})} = -\frac{2i\sin(\frac{\theta}{2})}{2\cos(\frac{\theta}{2})} = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

$$\text{D'où } \frac{z_1+1}{z_2+i} = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

2.b. En déduire la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{z_1+iz_2}{z_2+i}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{z_1+iz_2}{z_2+i} &= \frac{z_1+1-1+iz_2}{z_2+i} = \frac{z_1+1}{z_2+i} + \frac{iz_2-1}{z_2+i} = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{i(z_2+i)}{z_2+i} = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + i = \frac{-\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{i(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})}{\cos\frac{\theta}{2}}, \\ \text{or } 0 < \theta < \pi &\Leftrightarrow 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ donc } \cos\frac{\theta}{2} > 0, \text{ d'où } \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}} > 0, \text{ par suite } \frac{z_1+iz_2}{z_2+i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{e^{i(\frac{\theta+\pi}{2})}}{\cos\frac{\theta}{2}}. \\ \text{D'où } \frac{z_1+iz_2}{z_2+i} &= \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}e^{i(\frac{\theta+\pi}{2})}. \end{aligned}$$

Partie II :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = e^{i\theta}$, $b = (1+i)e^{i\theta}$ et $c = b - a$.

Soient m un nombre réel de $]0, 1[$, R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et le point Q d'affixe $q = me^{i\theta}$.

1.a. Déterminer l'affixe p du point P l'image du point Q par la rotation R.

$$\text{On a : } R = R(O, \frac{\pi}{2}) \text{ donc } M'(z') = R(M(z)) \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z \Leftrightarrow z' = iz.$$

$$\text{Donc } P(p) = R(Q(q)) \Leftrightarrow p = iq \Leftrightarrow p = mie^{i\theta}. \text{ Donc } p = ima.$$

1.b. Vérifier que : $R(A) = C$.

$$\text{Posons } A' = R(A) \text{ donc } z_{A'} = iz_A = ia = ie^{i\theta} = b - a \text{ donc } z_{A'} = c \text{ d'où } R(A) = C.$$

2. Soit H le point d'affixe $h = \frac{m}{m-i}e^{i\theta}$.

2.a. Montrer que : $\frac{p-a}{h} = \frac{m^2+1}{m}i$ et $\frac{h-a}{p-a} = \frac{1}{m^2+1}$.

$$\star \text{ On a } \frac{p-a}{h} = \frac{ima-a}{me^{i\theta}} = \frac{ia(m+i)(m-i)}{me^{i\theta}} = \frac{ie^{i\theta}(m^2+1)}{me^{i\theta}} = \frac{m^2+1}{m}i.$$

$$\star \text{ On a } \frac{h-a}{p-a} = \frac{\frac{ma}{m-i}-a}{ima-a} = \frac{\frac{m-m+i}{m-i}}{im-1} = \frac{i}{(m-i)(im-1)} = \frac{i}{i(m^2+1)} = \frac{1}{m^2+1}.$$

2.b. En déduire que H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AP).

$$\star \text{ On a : } \overrightarrow{(\overline{AP}, \overline{AH})} \equiv \arg\left(\frac{h-a}{p-a}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \overrightarrow{(\overline{AP}, \overline{AH})} \equiv \arg\left(\frac{1}{m^2+1}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \overrightarrow{(\overline{AP}, \overline{AH})} \equiv 0[2\pi]. \text{ Donc Les points A, H et P sont alignés. (Car } \frac{1}{m^2+1} > 0)$$

$$\star \text{ On a : } \overrightarrow{(\overline{OH}, \overline{AP})} \equiv \arg\left(\frac{p-a}{h}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \overrightarrow{(\overline{OH}, \overline{AP})} \equiv \arg\left(\frac{m^2+1}{m}i\right)[2\pi] \Leftrightarrow \overrightarrow{(\overline{OH}, \overline{AP})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]. \text{ Donc } (OH) \perp (AP). \text{ (Car } \frac{m^2+1}{m}i \in i\mathbb{R}^{+*})$$

Par conséquent $H \in (AP)$ et $(OH) \perp (AP)$, alors H est le projeté orthogonal de O sur la droite (AP).

2.c. Montrer que : $\frac{b-h}{q-h} = \frac{1}{m}i$.

$$\text{On a : } \frac{b-h}{q-h} = \frac{(1+i)e^{i\theta} - \frac{m}{m-i}e^{i\theta}}{me^{i\theta} - \frac{m}{m-i}e^{i\theta}} = \frac{1+i - \frac{m}{m-i}}{m - \frac{m}{m-i}} = \frac{(1+i)(m-i)-m}{m(m-i)-m} = \frac{m-i+im+1-m}{m(m-i-1)} = \frac{i(m-i-1)}{m(m-i-1)} = \frac{1}{m}i.$$

2.d. En déduire que les droites (QH) et (HB) sont perpendiculaires.

On a $\frac{b-h}{q-h} = \frac{1}{m}i$ donc $\frac{b-h}{q-h} \in i\mathbb{R}^*$, par suite les vecteurs $\overrightarrow{HQ}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont orthogonaux, par conséquent les droites (QH) et (HB) sont perpendiculaires.

2.e. Montrer que les points A, Q, H et B sont cocycliques.

$\star$ D'après la question précédente, on a $\frac{b-h}{q-h} = \frac{1}{m}i$, donc $\frac{b-h}{q-h} \notin \mathbb{R}$ donc les points Q, H et B ne sont pas alignés, par conséquent les points A, Q, H et B ne sont pas alignés non plus.

$$\star \text{ On a : } \frac{b-h}{q-h} \times \frac{q-a}{b-a} = \frac{1}{m}i \times \frac{ma-a}{(1+i)a-a} = \frac{1}{m}i \times \frac{m-1}{i} = \frac{m-1}{m} \text{ donc } \frac{b-h}{q-h} \times \frac{q-a}{b-a} \in \mathbb{R}^*.$$

Comme les points A, Q, H et B ne sont pas alignés et $\frac{b-h}{q-h} \times \frac{q-a}{b-a} \in \mathbb{R}^*$, alors les points A, Q, H et B sont cocycliques.

Exercice 4

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : (E) : $y = \frac{a}{b}x - \frac{c}{d}$ où a, b, c et d sont des entiers naturels non nuls vérifiant : $a \wedge b = c \wedge d = 1$.

1. On suppose que l'équation (E) admet une solution (x_0, y_0) .

1.a. Montrer que : d divise bc

$$\text{On a : } (E) \Leftrightarrow y = \frac{a}{b}x - \frac{c}{d} \Leftrightarrow bdy = adx - bc.$$

Supposons que (x_0, y_0) est une solution de l'équation (E) donc $bdy_0 = adx_0 - bc$ donc $adx_0 - bdy_0 = bc$ donc $d(ax_0 - by_0) = bc$, alors d divise bc .

1.b. En déduire que : d divise b .

$$\text{On a : } \begin{cases} c \wedge d = 1 \\ d \mid bc \end{cases}, \text{ alors, d'après le théorème de Gauss, } d \mid b.$$

2. On suppose que d divise b et on pose $b = nd$ où n est un entier naturel non nul.

2.a. Montrer qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $dnu - av = 1$.

On suppose que $d \mid b$ et on pose $b = nd$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après le théorème de Bézout, $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists (p, q) \in \mathbb{N}^2 : bp + aq = 1$ donc $\forall k \in \mathbb{Z} : bp + abk -$

$$abk + aq = 1 \Rightarrow b(p + ak) - a(bk - q) = 1. \text{ Déterminons les valeurs de } k \text{ qui vérifient } \begin{cases} p + ak \in \mathbb{N} \\ bk - q \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} p + ak \geq 0 \\ bk - q \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq -\frac{p}{a} \\ k \geq \frac{q}{b} \end{cases} \Leftrightarrow k \geq \max\left(-\frac{p}{a}, \frac{q}{b}\right).$$

Posons $k_0 = 1 + E\left(-\frac{p}{a}, \frac{q}{b}\right)$ et $u = p + ak_0$ et $v = bk_0 - q$, alors $(u, v) \in \mathbb{N}^2 : bu - av = 1$ donc $\exists (u, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $dnu - av = 1$.

2.b. En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \{(-vcn + bk, -ucn + ak) / k \in \mathbb{Z}\}$$

D'après la question 2.a., on a $\exists(u, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : dnu - av = 1 \Rightarrow bc(dnu) - bc(av) = bc$
 $\Rightarrow bcdnu - dncav = bc \Rightarrow ad(-vcn) - bd(-ucn) = bc$, alors $(-vcn, -ucn)$ est une solution dans $\mathbb{Z}^2$
de l'équation $adx - bdy = bc$. D'où $(-vcn, -ucn)$ est une solution dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation (E).

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de l'équation (E), donc $y = \frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ donc $\begin{cases} ad(-vcn) - bd(-ucn) = bc \\ adx - bdy = bc \end{cases}$

$$\Rightarrow ad(x + vcn) = bd(y + ucn) \Rightarrow a(x + vcn) = b(y + ucn) \Rightarrow \begin{cases} a \mid (y + ucn) \\ b \mid (x + vcn) \end{cases} \quad (\text{car } a \wedge b = 1)$$

$$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) / \begin{cases} x = -vcn + bk \\ y = -ucn + ak \end{cases}.$$

Inversement, soit $k \in \mathbb{Z}$, vérifions que $(-vcn + bk, -ucn + ak)$ est une solution de l'équation (E).
En effet on a : $ad(-vcn) - bd(-ucn) = -advn + bducn = dnc(-av + bu) = bc(bu - av) = bc$ (car $bu - av = 1$)
D'où $ad(-vcn) - bd(-ucn) = bc$, donc $(-vcn + bk, -ucn + ak)$ est une solution de l'équation (E).
Par conséquent l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{(-vcn + bk, -ucn + ak) / k \in \mathbb{Z}\}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (F) : $y = \frac{3}{2975}x - \frac{2}{119}$
(On donne $2975 = 119 \times 25$).

En posant $a = 3$, $b = 2975$, $c = 2$ et $d = 119$ on a $n = \frac{b}{d} = \frac{2975}{119} = 25$, $a \wedge b = 1$ et $c \wedge d = 1$. Donc on
est dans les conditions de la question 2. et l'équation (F) $\Leftrightarrow$ (E), alors d'après la question 2.a., $\exists(u, v) \in$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} / dnu - av = 1$. Déterminons u et v à l'aide de l'algorithme d'Euclide : $\begin{cases} 2975 = 3 \times 991 + 2 \\ 3 = 2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2 = b - 991a \\ 2 = a - 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow b - 991a = a - 1 \Rightarrow b - 992a = -1 \Rightarrow 2b - 1984a = -2 \Rightarrow 2b - 1984a + a = 1 \Rightarrow b(2) - a(1983) = 1$
donc $u = 2$ et $v = 1983$. D'après la question 2.b. les solutions de l'équation (E)

sont $(-vcn + bk, -ucn + ak) = (-1983 \times 2 \times 25 + 2975k, -2 \times 2 \times 25 + 3k) = (-99150 + 2975k, -100 + 3k) / k \in \mathbb{Z}$.
D'où l'ensemble des solutions de l'équation (F) est $S = \{(-99150 + 2975k, -100 + 3k) / k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 5

On rappelle que $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif de zéro la matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On munit l'ensemble $\mathbb{E} = \{x + iy / x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z}\}$ par la loi de composition interne $*$ définie par :
 $\forall(x, y, x', y') \in \mathbb{Z}^4; (x + iy) * (x' + iy') = (x + (-1)^y x') + (y + y')i$.

Partie I :

1.a. Vérifier que : $(1 - i) * (3 + 2i) = -2 + i$.

On a : $1 - i \in \mathbb{E}$ et $3 + 2i \in \mathbb{E}$ donc $(1 - i) * (3 + 2i) = (1 + (-1)^{-1} \times 3) + (-1 + 2)i = (1 - 3) + i = -2 + i$.

1.b. Montrer que la loi $*$ n'est pas commutative dans $\mathbb{E}$.

On a : $(3 + 2i) * (1 - i) = (3 + (-1)^2 \times 1) + (2 - 1)i = 4 + i$, et comme $(1 - i) * (3 + 2i) = -2 + i$ donc
 $(1 - i) * (3 + 2i) \neq (3 + 2i) * (1 - i)$. Alors il existe deux nombres complexes de $\mathbb{E}$: $z = 1 - i$ et $z' = 3 + 2i$
tels que $z * z' \neq z' * z$. Par conséquent la loi $*$ n'est pas commutative dans $\mathbb{E}$.

2. Montrer que la loi $*$ est associative dans $\mathbb{E}$.

Soient $(x, y, x', y', x'', y'') \in \mathbb{Z}^6$ donc $x + yi \in \mathbb{E}$, $x' + y'i \in \mathbb{E}$ et $x'' + y''i \in \mathbb{E}$. Alors :

$$\diamond ((x+yi)*(x'+y'i))*(x''+y''i) = ((x+(-1)^y x') + (y+y')i)*(x''+y''i) = (x+(-1)^y x') + (-1)^{y+y'} x'' + (y+y'+y'')i = x + (-1)^y x' + (-1)^{y+y'} x'' + (y+y'+y'')i$$

$$\diamond (x+yi)*((x'+y'i)*(x''+y''i)) = (x+yi)*((x'+(-1)^{y'} x'') + (y'+y'')i) = (x+(-1)^y (x'+(-1)^{y'} x'')) + (y+y'+y'')i = x + (-1)^y x' + (-1)^{y+y'} x'' + (y+y'+y'')i.$$

Alors $((x+yi)*(x'+y'i))*(x''+y''i) = (x+yi)*((x'+y'i)*(x''+y''i))$. D'où la loi $*$ est associative dans $\mathbb{E}$.

3. Montrer que 0 est l'élément neutre pour la loi $*$ dans $\mathbb{E}$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ donc $x + yi \in \mathbb{E}$. On a :
$$\begin{cases} 0 * (x + yi) = (0 + (-1)^0 x) + (0 + y)i = x + yi \\ (x + yi) * 0 = (x + (-1)^y \times 0) + (y + 0)i = x + yi \end{cases} \quad \text{Donc}$$

$\forall z \in \mathbb{E}; 0 * z = z * 0 = z$. Par conséquent 0 est l'élément neutre pour la loi $*$ dans $\mathbb{E}$.

4.a. Vérifier que : $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2; (x + iy) * ((-1)^{y+1} x - yi) = 0$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, on a : $(x + iy) * ((-1)^{y+1} x - yi) = x + (-1)^y \times (-1)^{y+1} x + (y - y)i = x + (-1)^{2y+1} x + 0i = x + (-1)^1 x = x - x = 0$. (Car $(-1)^{2y} = 1$).

D'où $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2; (x + iy) * ((-1)^{y+1} x - yi) = 0$

4.b. Montrer que $(\mathbb{E}, *)$ est un groupe non commutatif.

On vient de montrer dans les questions précédentes que :

★ La loi $*$ n'est pas commutative dans $\mathbb{E}$

★ La loi $*$ est associative dans $\mathbb{E}$

★ 0 est l'élément neutre pour la loi $*$ dans $\mathbb{E}$

★ Montrons que chaque élément de $\mathbb{E}$ admet un symétrique dans $\mathbb{E}$. On a vu dans la question 4.a. que : $\forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; (x + iy) * ((-1)^{y+1} x - yi) = 0$ et on a : $((-1)^{y+1} x - yi) * (x + yi) = ((-1)^{y+1} x + (-1)^{-y} x) + (-y + y)i = -(-1)^y x + (-1)^y x + 0i = 0$. Donc chaque élément $x + yi$ de $\mathbb{E}$ admet un symétrique $((-1)^{y+1} x - yi)$ pour la loi $*$ dans $\mathbb{E}$.

Alors $(\mathbb{E}, *)$ est un groupe non commutatif.

Partie II :

Soient les deux ensembles $\mathbb{F} = \{x + 2yi / x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathbb{G} = \{M(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z}\}$

1.a. Montrer que $\mathbb{F}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{E}, *)$.

★ $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2; x + 2yi \in \mathbb{E}$ donc $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$. En plus $\mathbb{F} \neq \emptyset$ car $0 = 0 + 2 \times 0i$ donc $0 \in \mathbb{F}$.

★ Soit $(x', y') \in \mathbb{Z}^2$ on a d'après I-4.a., le symétrique de $x' + 2y'i$ pour la loi $*$ dans $\mathbb{E}$ est $(-1)^{2y'+1} x' - 2y'i = -x' - 2y'i$. Alors $\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{Z}^4; (x + 2yi) * (x' + 2y'i)^{-1} = (x + 2yi) * (-x' - 2y'i) =$

$$(x + (-1)^{2y} (-x')) + (2y - 2y')i = (x - x') + 2(y - y')i = X + 2Yi \quad \left(\text{en posant} \begin{cases} X = x - x' \\ Y = y - y' \end{cases} \right).$$

Donc $\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{Z}^4; (x + 2yi) * (x' + 2y'i)^{-1} \in \mathbb{F}$. Par conséquent $\mathbb{F}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{E}, *)$.

1.b. Montrer que la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{F}$.

Soit $(x, x', y, y') \in \mathbb{Z}^4$ on a :

$$\star (x + 2yi) * (x' + 2y'i) = x + (-1)^{2y} x' + (2y + 2y')i = (x + x') + 2(y + y')i.$$

$$\star (x' + 2y'i) * (x + 2yi) = x' + (-1)^{2y'} x + (2y' + 2y)i = (x' + x) + 2(y' + y)i$$

Puisque l'addition est commutative dans $\mathbb{Z}$ alors $(x + x') + 2(y + y')i = (x' + x) + 2(y' + y)i$ donc $\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{Z}^4; (x + 2yi) * (x' + 2y'i) = (x' + 2y'i) * (x + 2yi)$. Par conséquent la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{F}$.

2. Soit φ l'application définie de $\mathbb{F}$ vers $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2; \varphi(x + 2yi) = M(x, y)$

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{F} &\rightarrow \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) \\ x + 2yi &\mapsto \varphi(x + 2yi) = M(x, y) \end{aligned}$$

2.a. Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{F}, *)$ vers $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

★ Soit $(x, x', y, y') \in \mathbb{Z}^4$ on a : $(x + 2yi) * (x' + 2y'i) = x + (-1)^{2y} x' + (2y + 2y')i = (x + x') + 2(y + y')i$.

$$\star \quad \varphi((x + 2yi) * (x' + 2y'i)) = \varphi((x + x') + 2(y + y')i) = M(x + x', y + y') = \begin{pmatrix} 1 & x + x' & y + y' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\star \quad \text{On a : } \varphi(x + 2yi) \times \varphi(x' + 2y'i) = M(x, y) \times M(x', y') = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x' & y' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x' + x & y' + y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{Z}^4$; $\varphi((x + 2yi) * (x' + 2y'i)) = \varphi(x + 2yi) \times \varphi(x' + 2y'i)$. Par conséquent φ est un homomorphisme de $(\mathbb{F}, *)$ vers $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

2.b. **Montrer que $\varphi(\mathbb{F}) = \mathbb{G}$.**

$\star$ Puisque $\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{Z}^4$; $\varphi(x + 2yi) = M(x, y)$ alors $\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{Z}^4$; $\varphi(x + 2yi) \in \mathbb{G}$. D'où $\varphi(\mathbb{F}) \subset \mathbb{G}$.

$\star$ Soit $M \in \mathbb{G}$ donc $\exists (x, y) \in \mathbb{Z}^2 / M = M(x, y)$ donc $\exists (x, y) \in \mathbb{Z}^2 / M = \varphi(x + 2yi)$ donc $M \in \varphi(\mathbb{F})$. D'où $\forall M \in \mathbb{G}$; $M \in \varphi(\mathbb{F})$. D'où $\mathbb{G} \subset \varphi(\mathbb{F})$.

Par conséquent $\varphi(\mathbb{F}) = \mathbb{G}$.

2.c. **En déduire que $(\mathbb{G}, \times)$ est un groupe commutatif.**

Puisque $\begin{cases} \varphi \text{ est un homomorphisme de } (\mathbb{F}, *) \text{ vers } (\mathbb{M}_3(\mathbb{R}), \times) \\ (\mathbb{F}, *) \text{ est un groupe commutatif} \\ \varphi(\mathbb{F}) = \mathbb{G} \end{cases}$, alors $(\varphi(\mathbb{F}), \times)$ est un groupe

commutatif et par conséquent $(\mathbb{G}, \times)$ est un groupe commutatif.