Corrigé de l'épreuve de mathématiques
Session de rattrapage 2025
Biof SMA - Biof SMB

S. EL JAAFARI

Exercice 1

Partie I :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=[0,+\infty[$ par : $f(0)=0$ et $f(x)=\frac{x^2 lnx}{x^2+1}$ si $x\in]0,+\infty[$
Et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a. Étudier la continuité de f à droite en 0.

On a $f(0)=0$ et $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+} x^2 lnx=0\\ \lim\limits_{x\to0^+} x^2+1=1\end{cases}$, alors $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2lnx}{x^2+1}=0$. Donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$. Par conséquent la fonction f est continue à droite en 0.

1.b. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Soit $x>0$ on a : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{x^2lnx}{x^2+1}-0}{x-0}=\frac{\frac{x^2lnx}{x^2+1}}{x}=\frac{xlnx}{x^2+1}$, et comme $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+} xlnx=0\\ \lim\limits_{x\to0^+} x^2+1=1\end{cases}$,

alors $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{xlnx}{x^2+1}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$. Par conséquent la fonction f est dérivable à droite en 0, et on a : $f'_d(0)=0$.
Par suite la courbe (C) admet une demi-tangente horizontale à droite à l'origine O du repère.

1.c. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

- On a : $\begin{cases}(\forall x\in]0,+\infty),\ f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}\times lnx\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} lnx=+\infty\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}\times lnx=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

- On a : $\begin{cases}(\forall x\in]0,+\infty)\ ,\ \frac{f(x)}{x}=\frac{x^2}{x^2+1}\times\frac{lnx}{x}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{lnx}{x}=0\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}\times\dfrac{lnx}{x}=0$. Par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

- On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, alors la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction asymptotique l'axe des abscisses.

2. Soit φ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $\varphi(x)=x^2+1+2lnx$.

2.a. Dresser le tableau de variations de φ.
Les fonctions $x\mapsto x^2+1$ et $x\mapsto 2lnx$ sont strictement croissantes sur $]0,+\infty[$ alors la fonction φ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ comme somme des deux fonctions citées , et on a $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=-\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$; . D'où le tableau de variation de la fonction φ sur $]0,+\infty[$ est :

x	0		$+\infty$
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2.b. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β appartenant à l'intervalle $]\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}[$. (On donne $ln2 \simeq 0.7$ et $ln3 \simeq 1.1$)

Puisque φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors elle est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, en plus on a $\varphi(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 + 1 + 2ln(\frac{1}{2}) \simeq 0.25 + 1 - 1.4 \simeq -0.15$, et on a $\varphi(\frac{1}{\sqrt{3}}) = (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 1 + 2ln(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{3} + 1 - ln3 \simeq 0.33 + 1 - 1.1 \simeq 0.23$, d'où $\varphi(\frac{1}{2}) \times \varphi(\frac{1}{\sqrt{3}}) < 0$, alors d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (TVI) l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β appartenant à l'intervalle $]\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}[$.

2.c. Montrer que $f(\beta) = -\frac{\beta^2}{2}$.

On a $\varphi(\beta) = 0 \Leftrightarrow \beta^2 + 1 + 2ln(\beta) = 0 \Leftrightarrow ln(\beta) = -\frac{1+\beta^2}{2}$, d'où $f(\beta) = \frac{\beta^2 ln(\beta)}{\beta^2+1} = \frac{\beta^2\left(-\frac{1+\beta^2}{2}\right)}{\beta^2+1} = -\frac{\beta^2}{2}$.

3.a. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $\forall x \in]0,+\infty[, f'(x) = \frac{x\varphi(x)}{\left(x^2+1\right)^2}$.

On a $(\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \times ln(x)$.

Puisque les fonctions $x \mapsto \frac{x^2}{x^2+1}$ et $x \mapsto lnx$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$, la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme produit de ses deux fonctions.

Soit $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2+1} \times ln(x)\right)' = \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)' \times lnx + \frac{x^2}{x^2+1} \times (lnx)' = \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2} \times lnx + \frac{x}{x^2+1} = \frac{2xlnx + x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x\left(2lnx+x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x\varphi(x)}{\left(x^2+1\right)^2}$.

3.b. Donner le tableau de variations de f.

Puisque la fonction φ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et β est l'unique réel tel que $\varphi(\beta) = 0$, alors $(\forall x \in]0,\beta]$, $\varphi(x) \leq 0$ et $(\forall x \in [\beta,+\infty[$, $\varphi(x) \geq 0$ d'où $(\forall x \in]0,\beta]$, $f'(x) \leq 0$ et $(\forall x \in [\beta,+\infty[$, $f'(x) \geq 0$. Par conséquent , le tableau de variations de la fonction f est :

x	0		β		$+\infty$
$\varphi(x)$	||	-	0	+	
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\beta) = -\frac{\beta^2}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

3.c. Montrer que $\frac{1}{\beta}$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ sur $]\beta,+\infty[$.

D'après la question $(I-3.b)$ la fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[\beta,+\infty[$ et $f([\beta,+\infty[) = [-\frac{\beta^2}{2},+\infty[$ et puisque $\frac{1}{2} \in [-\frac{\beta^2}{2},+\infty[$, alors d'après le théorème de la bijection l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution dans $]\beta, +\infty[$.

On a : $f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 \times \frac{ln\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 + 1} = \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 \times \frac{-ln(\beta)}{\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 + 1} = \frac{-ln\beta}{\beta^2+1}$.

Or on a $\varphi(\beta) = 0 \Leftrightarrow \beta^2 + 1 + 2ln(\beta) = 0 \Leftrightarrow ln\beta = -\frac{\beta^2+1}{2}$. Alors $f\left(\frac{1}{\beta}\right) = -\frac{ln\beta}{\beta^2+1} = -\frac{-\frac{\beta^2+1}{2}}{\beta^2+1} = \frac{1}{2}$. Donc $f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{2}$, par conséquent $\frac{1}{\beta}$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ sur $]\beta, +\infty[$.

3.d. Montrer que la droite d'équation $y = \beta x - \frac{1}{2}$ est la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $\frac{1}{\beta}$.

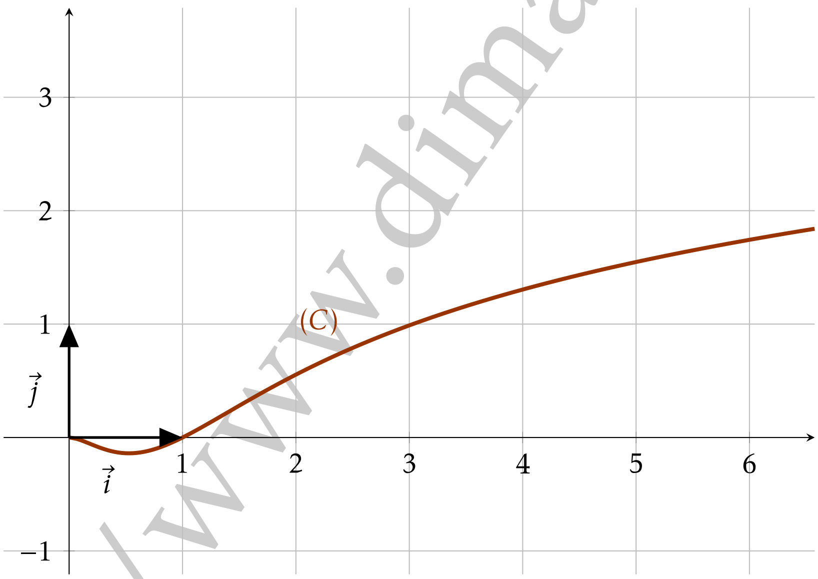
L'équation de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $\frac{1}{\beta}$ est : $y = f'\left(\frac{1}{\beta}\right)\left(x - \frac{1}{\beta}\right) + f\left(\frac{1}{\beta}\right)$.

Or $f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{2}$ et $f'\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{\frac{1}{\beta}\times\varphi\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\left(\frac{1}{\beta^2}+1\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\beta^2}+1-2ln(\beta)\right)}{\left(\frac{1}{\beta^2}+1\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\beta^2}+1+\beta^2+1\right)}{\left(\frac{1}{\beta^2}+1\right)^2} = \beta \times \frac{\left(\frac{1}{\beta}+\beta\right)^2}{big\left(\frac{1}{\beta}+\beta\right)^2} = \beta$ c-à-d $f'\frac{1}{\beta}) = \beta$.

Alors $y = f'\left(\frac{1}{\beta}\right)\left(x - \frac{1}{\beta}\right) + f\left(\frac{1}{\beta}\right) \Leftrightarrow y = \beta\left(x - \frac{1}{\beta}\right) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \beta x - 1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \beta x - \frac{1}{2}$.

Par conséquent la droite d'équation $y = \beta x - \frac{1}{2}$ est la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $\frac{1}{\beta}$.

4. Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
(On admet que la courbe (C) possède deux points d'inflexion)
Courbe (C) :



Partie II :

On pose $J = \left]\sqrt{3}, 2\right[$ et $\alpha = \frac{1}{\beta}$

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{e^{1+\frac{1}{x^2}}}$.

1.a. Étudier les variations de g.

La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a : $g'(x) = \frac{\left(e^{1+\frac{1}{x^2}}\right)'}{2\sqrt{e^{1+\frac{1}{x^2}}}} = \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)' e^{1+\frac{1}{x^2}}}{2\sqrt{e^{1+\frac{1}{x^2}}}} = -\frac{\frac{2}{x^3} e^{1+\frac{1}{x^2}}}{2\sqrt{e^{1+\frac{1}{x^2}}}} = -\frac{e^{1+\frac{1}{x^2}}}{x^3\sqrt{e^{1+\frac{1}{x^2}}}}$,

donc $(\forall x \in J)$, $g'(x) = -\frac{\sqrt{e^{1+\frac{1}{x^2}}}}{x^3}$. Et on a $\forall x > 0$, $\frac{\sqrt{e^{1+\frac{1}{x^2}}}}{x^3} > 0$, d'où $\forall x > 0$, $g'(x) < 0$.
Par conséquent la fonction g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

1.b. Montrer que $(\forall x \in J)$, $\sqrt{3} < g(x) < 2$.
(On donne $\sqrt{3} \simeq 1.73$, $e^{\frac{2}{3}} \simeq 1.95$ et $e^{\frac{5}{8}} \simeq 1.87$)

Puisque la fonction g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, Soit $x \in J$ donc $\sqrt{3} < x < 2$ alors $g(2) < g(x) < g(\sqrt{3})$; or $g(2) = \sqrt{e^{1+\frac{1}{4}}} = \sqrt{e^{\frac{5}{4}}} = e^{\frac{5}{8}} \simeq 1.87$, et $g(\sqrt{3}) = \sqrt{e^{1+\frac{1}{3}}} = \sqrt{e^{\frac{4}{3}}} = e^{\frac{2}{3}} \simeq 1.95$.
D'où $\sqrt{3} < 1.87 < g(x) < 1.95 < 2$. Par conséquent $(\forall x \in J)$, $\sqrt{3} < g(x) < 2$.

2.a. En utilisant le résultat de la question I-3.c., montrer que : $g(\alpha) = \alpha$.

D'après la question $(I - 3.c.)$ on a : $f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta^2} \times \frac{ln\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + \beta^2 = -2ln\beta$. Alors

$g(\alpha) = \sqrt{e^{1+\frac{1}{\alpha^2}}} = \sqrt{e^{1+\beta^2}} = \sqrt{e^{-2ln\beta}} = \sqrt{\frac{1}{e^{ln\beta^2}}} = \sqrt{\frac{1}{\beta^2}} = \frac{1}{\beta} = \alpha.$ (car $\beta > 0$)

2.b. Montrer que : $(\forall x \in J)$, $|g'(x)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

D'après la question $(II-1.a.)$ on a : $(\forall x \in J),\ g'(x) = -\frac{\sqrt{e^{1+\frac{1}{x^2}}}}{x^3}$. Donc $(\forall x \in J),\ g'(x) = -\frac{g(x)}{x^3}$, D'où $|g'(x)| = \frac{g(x)}{x^3}$.

Puisque $(\forall x \in J), \begin{cases} \sqrt{3} < g(x) < 2 \\ 3\sqrt{3} < x^3 < 8 \end{cases}$, alors $\frac{\sqrt{3}}{8} < \frac{g(x)}{x^3} < \frac{2}{3\sqrt{3}}$, d'où $\frac{\sqrt{3}}{8} < |g'(x)| < \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Par conséquent $(\forall x \in J),\ |g'(x)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

2.c. En déduire que : $(\forall x \in J)$, $|g(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}|x-\alpha|$.

Puisque $\frac{1}{\beta} < \frac{1}{\sqrt{3}} < 1 < \sqrt{3}$, alors $(\forall x \in J),\ \alpha < x$.

Soit $x \in J$, $\begin{cases} g \text{ est continue sur }]0,+\infty[\Rightarrow g \text{ est continue sur } [\alpha, x] \\ g \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[, \Rightarrow g \text{ est dérivable sur }]\alpha, x[\\ (\forall t \in [\alpha, x]),\ |g'(t)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}. \end{cases}$.

Alors, d'après le théorème des inégalités des accroissements finis sur l'intervalle $[\alpha, x]$, on a $|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}|x-\alpha|$.

Par conséquent , $(\forall x \in J)$, $|g(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}|x-\alpha|$ (Car $g(\alpha) = \alpha$).

3. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $x_0 = \frac{7}{4}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$.

3.a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $x_n \in J$.

Raisonnons par récurrence sur n.

- Initialisation : Pour $n = 0$ on a $x_0 = \frac{7}{4}$; et comme $\sqrt{3} < \frac{7}{4} < 2$ alors $x_0 \in J$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $x_n \in J$, et montrons que $x_{n+1} \in J$.

Démonstration : D'après (HR) on a $x_n \in J$ donc $\sqrt{3} < x_n < 2$ or $(\forall x \in J),\ g(x) \in J$, donc $g(x_n) \in J$. Par conséquent $x_{n+1} \in J$.

- Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $x_n \in J$.

3.b. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $|x_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha|$.

Raisonnons par récurrence sur n.

- Initialisation : Pour $n = 0$ on a : $|x_0 - \alpha| \leq |x_0 - \alpha|$, donc la proposition est vraie pour $n = 0$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|x_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha|$,

et montrons que $|x_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{n+1} |x_0 - \alpha|$.

Démonstration : D'après les questions $II-2.c.$ et $II-3.a.$ on a : $\begin{cases} (\forall x \in J),\ |g(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}|x-\alpha| \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ x_n \in J \end{cases}$

alors $(\forall n \in \mathbb{N}),\ |g(x_n) - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}|x_n - \alpha|$ donc $(\forall n \in \mathbb{N}),\ |x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}|x_n - \alpha|$. et d'après (HR) , On a : $|x_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha|$, alors $|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \times \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha|$. D'où $|x_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{n+1} |x_0 - \alpha|$.

- Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $|x_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha|$.

3.c. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

On a $2 < 3\sqrt{3} \Rightarrow 0 < \frac{2}{3\sqrt{3}} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |x_n - \alpha| = 0,$

donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Exercice 2

On considère la suite numérique $(U_n)_{n\geq 2}$ définie par : $(\forall n \geq 2)$, $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} ln(\frac{k}{n})$.

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1.a. Montrer que pour tout entier $k \in \{1,2,...,n-1\}$ et pour tout réel $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ on a ; $ln(\frac{k}{n}) \leq ln(x) \leq ln(\frac{k+1}{n})$.

On sait que la fonction ln est croissante sur $]0,+\infty[$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$ on a $\forall k \in \{1,2,...,n-1\}$, $\frac{k}{n} > 0$.
Soit $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, on a $\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}$, donc $ln(\frac{k}{n}) \leq ln(x) \leq ln(\frac{k+1}{n})$.
Par conséquent $(\forall x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}])$, $ln(\frac{k}{n}) \leq ln(x) \leq ln(\frac{k+1}{n})$.

1.b. En déduire que : $\forall k \in \{1,2,...,n-1\}$, $\frac{1}{n}ln(\frac{k}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} ln(x)\,dx \leq \frac{1}{n}ln(\frac{k+1}{n})$.

Soit $k \in \{1,2,...,n-1\}$ On a $\frac{k}{n} < \frac{k+1}{n}$ et la fonction ln est continue sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ et $ln(\frac{k}{n}) \leq ln(x) \leq ln(\frac{k+1}{n})$, alors en intégrant on obtient $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} ln(\frac{k}{n})\,dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} lnx\,dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} ln(\frac{k+1}{n})\,dx$
donc $ln(\frac{k}{n})\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} lnx\,dx \leq ln(\frac{k+1}{n})\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dx$ donc $\frac{1}{n}ln(\frac{k}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} lnx\,dx \leq \frac{1}{n}ln(\frac{k+1}{n})$. D'où $\forall k \in \{1,2,...,n-1\}$, $\frac{1}{n}ln(\frac{k}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} ln(x)\,dx \leq \frac{1}{n}ln(\frac{k+1}{n})$.

2.a. Montrer que : $\forall n \geq 2$, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} ln(\frac{k}{n}) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} ln(x)\,dx \leq \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} ln(\frac{k}{n})$.

D'après la question précédente, on a : $\forall k \in \{1,2,...,n-1\}$, $\frac{1}{n}ln(\frac{k}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} ln(x)\,dx \leq \frac{1}{n}ln(\frac{k+1}{n})$,

en appliquant des sommes terme à terme on obtient : $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}ln(\frac{k}{n}) \leq \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} ln(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}ln(\frac{k+1}{n})$

$\star$) On a $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}ln(\frac{k}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} ln(\frac{k}{n})$.

$\star$) En appliquant la relation de Chasles sur les intégrales, on obtient : $\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} ln(x)\,dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} ln(x)\,dx$.

$\star$) En posant $k' = k+1$, on obtient $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}ln(\frac{k+1}{n}) = \sum_{k'=2}^{n}\frac{1}{n}ln(\frac{k'}{n}) = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{n}ln(\frac{k}{n})$

D'où $\forall n \geq 2$, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} ln(\frac{k}{n}) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} ln(x)\,dx \leq \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} ln(\frac{k}{n})$.

2.b. En déduire que : $U_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} ln(x)\,dx \leq U_n - \frac{1}{n}ln(\frac{1}{n})$.

On a : $\sum_{k=2}^{n} ln(\frac{k}{n}) = \sum_{k=1}^{n-1} ln(\frac{k}{n}) - ln(\frac{1}{n}) + ln(\frac{n}{n}) = \sum_{k=1}^{n-1} ln(\frac{k}{n}) - ln(\frac{1}{n})$, d'où $\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} ln(\frac{k}{n}) = U_n - \frac{1}{n}ln(\frac{1}{n})$.
Par conséquent $U_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} ln(x)\,dx \leq U_n - \frac{1}{n}ln(\frac{1}{n})$

2.c. Montrer que : $-1+\frac{1}{n} \leq U_n \leq -1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}ln(\frac{1}{n})$.

D'après la question précédente, on a : $U_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} ln(x)\,dx \leq U_n - \frac{1}{n}ln(\frac{1}{n})$ donc
$\int_{\frac{1}{n}}^{1} ln(x)\,dx + \frac{1}{n}ln(\frac{1}{n}) \leq U_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} ln(x)\,dx$. Or $\int_{\frac{1}{n}}^{1} ln(x)\,dx = [xlnx - x]_{\frac{1}{n}}^{1} = 0-1-(\frac{1}{n}ln(\frac{1}{n})-\frac{1}{n}) = -1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}ln(\frac{1}{n})$.
Par conséquent $-1+\frac{1}{n} \leq U_n \leq -1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}ln(\frac{1}{n})$

2.d. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

On a : $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}ln(\frac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{ln(n)}{n} = 0 \\ \lim_{n\to+\infty} -1+\frac{1}{n} = -1 \end{cases}$ donc $\lim_{n\to+\infty} -1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}ln(\frac{1}{n}) = -1$. Alors, d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -1$

Exercice 3

Soit $\theta \in [0, \pi[$

Partie I :

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) d'inconnue z

$$(E_\theta) : \quad z^2 + (1-i)e^{i\theta}z - ie^{i2\theta} = 0$$

1.a. Vérifier que : $(E_\theta) \Leftrightarrow \left(2z + (1-i)e^{i\theta}\right)^2 = \left((1+i)e^{i\theta}\right)^2$.

On a : $\left(2z + (1-i)e^{i\theta}\right)^2 = \left((1+i)e^{i\theta}\right)^2 \Leftrightarrow \left(2z + (1-i)e^{i\theta}\right)^2 - \left((1+i)e^{i\theta}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$
$4z^2 + 4(1-i)e^{i\theta}z + (1-i)^2e^{2i\theta} - (1+i)^2e^{2i\theta} = 0 \Leftrightarrow 4z^2 + 4(1-i)e^{i\theta}z - 2ie^{2i\theta} - 2ie^{i\theta} = 0 \Leftrightarrow$
$4\left(z^2 + (1-i)e^{i\theta}z - ie^{i2\theta}\right) = 0 \Leftrightarrow z^2 + (1-i)e^{i\theta}z - ie^{i2\theta} = 0 \Leftrightarrow (E_\theta)$.

D'où $(E_\theta) \Leftrightarrow \left(2z + (1-i)e^{i\theta}\right)^2 = \left((1+i)e^{i\theta}\right)^2$.

1.b. En déduire les deux solutions z_1 et z_2 de l'équation (E_θ) avec $Im(z_1) \leq 0$.

$(E_\theta) \Leftrightarrow \left(2z+(1-i)e^{i\theta}\right)^2 = \left((1+i)e^{i\theta}\right)^2 \Leftrightarrow 2z+(1-i)e^{i\theta} = (1+i)e^{i\theta}$ ou $2z+(1-i)e^{i\theta} = -(1+i)e^{i\theta} \Leftrightarrow z = ie^{i\theta}$ ou $z = -e^{i\theta}$. Or $\begin{cases} \diamond \quad z = ie^{i\theta} \Leftrightarrow Im(z) = cos\theta. \\ \diamond \quad z = -e^{i\theta} = -cos\theta - isin\theta \Leftrightarrow Im(z) = -sin\theta \end{cases}$, et puisque $\theta \in]0, \pi[$, alors $-sin\theta < 0$, par conséquent $z_1 = -e^{i\theta}$ et $z_2 = ie^{i\theta}$.

2.a. Montrer que : $\frac{z_1+1}{z_2+i} = -tan(\frac{\theta}{2})$.

On a : $\frac{z_1+1}{z_2+i} = \frac{1-e^{i\theta}}{i\left(1+e^{i\theta}\right)} = \frac{-e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{ie^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} = -\frac{2isin(\frac{\theta}{2})}{i2cos(\frac{\theta}{2})} = -tan(\frac{\theta}{2})$.

D'où $\frac{z_1+1}{z_2+i} = -tan(\frac{\theta}{2})$.

2.b. En déduire la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{z_1+iz_2}{z_2+i}$.

On a : $\frac{z_1+iz_2}{z_2+i} = \frac{z_1+1-1+iz_2}{z_2+i} = \frac{z_1+1}{z_2+i} + \frac{iz_2-1}{z_2+i} = -tan(\frac{\theta}{2}) + \frac{i\left(z_2+i\right)}{z_2+i} = -tan(\frac{\theta}{2}) + i = \frac{-sin\frac{\theta}{2}+icos\frac{\theta}{2}}{cos\frac{\theta}{2}} = \frac{i\left(cos\frac{\theta}{2}+isin\frac{\theta}{2}\right)}{cos\frac{\theta}{2}}$,

or $0 < \theta < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ donc $cos\frac{\theta}{2} > 0$, d'où $\frac{1}{cos\frac{\theta}{2}} > 0$, par suite $\frac{z_1+iz_2}{z_2+i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}}{cos\frac{\theta}{2}} = \frac{e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}}{cos\frac{\theta}{2}}$.

D'où $\frac{z_1+iz_2}{z_2+i} = \frac{1}{cos\frac{\theta}{2}}e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$.

Partie II :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = e^{i\theta}, b = (1+i)e^{i\theta}$ et $c = b - a$.
Soient m un nombre réel de $]0, 1[$, R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et le point Q d'affixe $q = me^{i\theta}$.

1.a. Déterminer l'affixe p du point P l'image du point Q par la rotation R .
On a : $R = R\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ donc $M'(z') = R\left(M(z)\right) \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z \Leftrightarrow z' = iz$.
Donc $P(p) = R\left(Q(q)\right) \Leftrightarrow p = iq \Leftrightarrow p = mie^{i\theta}$. Donc $p = ima$.

1.b. Vérifier que : $R(A) = C$.
Posons $A' = R(A)$ donc $z_{A'} = iz_A = ia = ie^{i\theta} = b - a$ donc $z_{A'} = c$ d'où $R(A) = C$.

2. Soit H le point d'affixe $h = \frac{m}{m-i}e^{i\theta}$.

2.a. Montrer que : $\frac{p-a}{h} = \frac{m^2+1}{m}i$ et $\frac{h-a}{p-a} = \frac{1}{m^2+1}$.

- ★ On a $\frac{p-a}{h} = \frac{ima-a}{\frac{me^{i\theta}}{m-i}} = \frac{ia(m+i)(m-i)}{me^{i\theta}} = \frac{ie^{i\theta}(m^2+1)}{me^{i\theta}} = \frac{m^2+1}{m}i.$
- ★ On a $\frac{h-a}{p-a} = \frac{\frac{ma}{m-i}-a}{ima-a} = \frac{\frac{m-m+i}{m-i}}{im-1} = \frac{i}{(m-i)(im-1)} = \frac{i}{i(m^2+1)} = \frac{1}{m^2+1}.$

2.b. En déduire que H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AP) .

- ★ On a : $\overline{(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AH})} \equiv arg(\frac{h-a}{p-a})[2\pi] \Leftrightarrow \overline{(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AH})} \equiv arg(\frac{1}{m^2+1})[2\pi] \Leftrightarrow \overline{(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AH})} \equiv 0[2\pi]$. Donc Les points A, H et P sont alignés .(Car $\frac{1}{m^2+1} > 0$)
- ★ On a : $\overline{(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{AP})} \equiv arg(\frac{p-a}{h})[2\pi] \Leftrightarrow \overline{(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{AP})} \equiv arg(\frac{m^2+1}{m}i)[2\pi] \Leftrightarrow \overline{(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{AP})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Donc $(OH) \perp (AP)$. (Car $\frac{m^2+1}{m}i \in i\mathbb{R}^{+*}$)

Par conséquent $H \in (AP)$ et $(OH) \perp (AP)$, alors H est le projeté orthogonal de O sur la droite (AP).

2.c. Montrer que : $\frac{b-h}{q-h} = \frac{1}{m}i$.

On a : $\frac{b-h}{q-h} = \frac{(1+i)e^{i\theta} - \frac{m}{m-i}e^{i\theta}}{me^{i\theta} - \frac{m}{m-i}e^{i\theta}} = \frac{1+i-\frac{m}{m-i}}{m-\frac{m}{m-i}} = \frac{(1+i)(m-i)-m}{m(m-i)-m} = \frac{m-i+im+1-m}{m(m-i-1)} = \frac{i(m-i-1)}{m(m-i-1)} = \frac{1}{m}i.$

2.d. En déduire que les droites (QH) et (HB) sont perpendiculaires .

On a $\frac{b-h}{q-h} = \frac{1}{m}i$ donc $\frac{b-h}{q-h} \in i\mathbb{R}^*$, par suite les vecteurs $\overrightarrow{HQ}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont orthogonaux, par conséquent les droites (QH) et (HB) sont perpendiculaires.

2.e. Montrer que les points A, Q, H et B sont cocycliques.

- ★ D'après la question précédente, on a $\frac{b-h}{q-h} = \frac{1}{m}i$, donc $\frac{b-h}{q-h} \notin \mathbb{R}$ donc les points Q, H et B ne sont pas alignés, par conséquent les points A, Q, H et B ne sont pas alignés non plus.
- ★ On a : $\frac{b-h}{q-h} \times \frac{q-a}{b-a} = \frac{1}{m}i \times \frac{ma-a}{(1+i)a-a} = \frac{1}{m}i \times \frac{m-1}{i} = \frac{m-1}{m}$ donc $\frac{b-h}{q-h} \times \frac{q-a}{b-a} \in \mathbb{R}^*$.

  Comme les points A, Q ,H et B ne sont pas alignés et $\frac{b-h}{q-h} \times \frac{q-a}{b-a} \in \mathbb{R}^*$, alors les points A, Q, H et B sont cocycliques .

Exercice 4

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation : (E) : $y = \frac{a}{b}x - \frac{c}{d}$ où a, b, c et d sont des entiers naturels non nuls vérifiant : $a \wedge b = c \wedge d = 1$.

1. On suppose que l'équation (E) admet une solution (x_0, y_0).

1.a. Montrer que : d divise bc

On a : $(E) \Leftrightarrow y = \frac{a}{b}x - \frac{c}{d} \Leftrightarrow bdy = adx - bc$.

Supposons que (x_0, y_0) est une solution de l'équation (E) donc $bdy_0 = adx_0 - bc$ donc $adx_0 - bdy_0 = bc$ donc $d(ax_0 - by_0) = bc$, alors d divise bc.

1.b. En déduire que : d divise b.

On a : $\begin{cases} c \wedge d = 1 \\ d \mid bc \end{cases}$, alors, d'après le théorème de Gauss, $d \mid b$.

2. On suppose que d divise b et on pose $b = nd$ où n est un entier naturel non nul.

2.a. Montrer qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $dnu - av = 1$.

On suppose que $d \mid b$ et on pose $b = nd$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après le théorème de Bézout , $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists (p, q) \in \mathbb{N}^2 : bp + aq = 1$ donc $\forall k \in \mathbb{Z} : bp + abk - abk + aq = 1 \Rightarrow b(p + ak) - a(bk - q) = 1$. Déterminons les valeurs de k qui vérifient $\begin{cases} p + ak \in \mathbb{N} \\ bk - q \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} p + ak \geq 0 \\ bk - q \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq -\frac{p}{a} \\ k \geq \frac{q}{b} \end{cases} \Leftrightarrow k \geq max(\frac{-p}{a}, \frac{q}{b}).$

Posons $k_0 = 1 + E(\frac{-p}{a}, \frac{q}{b})$ et $u = p + ak_0$ et $v = bk_0 - q$, alors $(u, v) \in \mathbb{N}^2 : bu - av = 1$ donc $\exists (u, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $dnu - av = 1$.

2.b. En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \{(-vcn + bk, -ucn + ak)/k \in \mathbb{Z}\}$$

D'après la question 2.a., on a $\exists(u,v) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : dnu - av = 1 \Rightarrow bc(dnu) - bc(av) = bc$
$\Rightarrow bcdnu - dncav = bc \Rightarrow ad(-vcn) - bd(-ucn) = bc$, alors $(-vcn, -ucn)$ est une solution dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $adx - bdy = bc$. D'où $(-vcn, -ucn)$ est une solution dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation (E).

Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de l' équation (E) , donc $y = \frac{a}{b}x - \frac{c}{d}$ donc $\begin{cases} ad(-vcn) - bd(-ucn) = bc \\ adx - bdy = bc \end{cases}$

$\Rightarrow ad(x + vcn) = bd(y + ucn) \Rightarrow a(x + vcn) = b(y + ucn) \Rightarrow \begin{cases} a \mid (y + ucn) \\ b \mid (x + vcn) \end{cases}$ $(car\ a \wedge b = 1)$

$\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})/ \begin{cases} x = -vcn + bk \\ y = -ucn + ak \end{cases}$.

Inversement, soit $k \in \mathbb{Z}$, vérifions que $(-vcn + bk, -ucn + ak)$ est une solution de l'équation (E).
En effet on a : $ad(-vcn) - bd(-ucn) = -advcn + bducn = dnc(-av + bu) = bc(bu - av) = bc$ (car $bu - av = 1$)
D'où $ad(-vcn) - bd(-ucn) = bc$, donc $(-vcn + bk, -ucn + ak)$ est une solution de l'équation (E).
Par conséquent l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :$S = \{(-vcn + bk, -ucn + ak)/k \in \mathbb{Z}\}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(F) : \ y = \frac{3}{2975}x - \frac{2}{119}$
(On donne $2975 = 119 \times 25$).
En posant $a = 3$, $b = 2975$, $c = 2$ et $d = 119$ on a $n = \frac{b}{d} = \frac{2975}{119} = 25$, $a \wedge b = 1$ et $c \wedge d = 1$. Donc on est dans les conditions de la question 2. et l'équation $(F) \Leftrightarrow (E)$, alors d'après la question 2.a., $\exists(u,v) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}/dnu - av = 1$. Déterminons u et v à l'aide de l'algorithme d'Euclide : $\begin{cases} 2975 = 3 \times 991 + 2 \\ 3 = 2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2 = b - 991a \\ 2 = a - 1 \end{cases}$
$\Rightarrow b - 991a = a - 1 \Rightarrow b - 992a = -1 \Rightarrow 2b - 1984a = -2 \Rightarrow 2b - 1984a + a = 1 \Rightarrow b(2) - a(1983) = 1$
donc $u = 2$ et $v = 1983$. D'après la question 2.b. les solutions de l'équation (E) sont $(-vcn + bk, -ucn + ak) = (-1983 \times 2 \times 25 + 2975k, -2 \times 2 \times 25 + 3k) = (-99150 + 2975k, -100 + 3k)/k \in \mathbb{Z}$.
D'où l'ensemble des solutions de l'équation (F) est $S = \{(-99150 + 2975k, -100 + 3k)/k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 5

On rappelle que $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif de zéro la matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On munit l'ensemble $\mathbb{E} = \{x + iy/x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z}\}$ par la loi de composition interne $*$ définie par :
$\forall (x,y,x',y') \in \mathbb{Z}^4;\ (x + iy) * (x' + iy') = \left(x + (-1)^y x'\right) + (y + y')i$.

Partie I :

1.a. Vérifier que : $(1 - i) * (3 + 2i) = -2 + i$.
On a : $1 - i \in \mathbb{E}$ et $3 + 2i \in \mathbb{E}$ donc $(1 - i) * (3 + 2i) = \left(1 + (-1)^{-1} \times 3\right) + (-1 + 2)i = (1 - 3) + i = -2 + i$.

1.b. Montrer que la loi $*$ n'est pas commutative dans $\mathbb{E}$.
On a : $(3 + 2i) * (1 - i) = \left(3 + (-1)^2 \times 1\right) + (2 - 1)i = 4 + i$, et comme $(1 - i) * (3 + 2i) = -2 + i$ donc $(1 - i) * (3 + 2i) \neq (3 + 2i) * (1 - i)$. Alors il existe deux nombres complexes de $\mathbb{E}$: $z = 1 - i$ et $z' = 3 + 2i$ tels que $z * z' \neq z' * z$. Par conséquent la loi $*$ n'est pas commutative dans $\mathbb{E}$

2. Montrer que la loi $*$ est associative dans $\mathbb{E}$.

Soient $(x,y,x',y',x'',y'')\in\mathbb{Z}^6$ donc $x+yi\in\mathbb{E}$, $x'+y'i\in\mathbb{E}$ et $x''+y''i\in\mathbb{E}$. Alors :

◊ $\big((x+yi)*(x'+y'i)\big)*(x''+y''i)=\big((x+(-1)^y x')+(y+y')i\big)*(x''+y''i)=(x+(-1)^y x')+(-1)^{y+y'}x''+(y+y'+y'')i=x+(-1)^y x'+(-1)^{y+y'}x''+(y+y'+y'')i$

◊ $(x+yi)*\big((x'+y'i)*(x''+y''i)\big)=(x+yi)*\big((x'+(-1)^{y'}x'')+(y'+y'')i=(x+(-1)^y(x'+(-1)^{y'}x'')+(y+y'+y'')i=x+(-1)^y x'+(-1)^{y+y'}x''+(y+y'+y'')i.$

Alors $\big((x+yi)*(x'+y'i)\big)*(x''+y''i)=(x+yi)*\big((x'+y'i)*(x''+y''i)\big)$. D'où la loi $*$ est associative dans $\mathbb{E}$.

3. Montrer que 0 est l'élément neutre pour la loi $*$ dans $\mathbb{E}$.

Soit $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ donc $x+yi\in\mathbb{E}$. On a : $\begin{cases}0*(x+yi)=(0+(-1)^0x)+(0+y)i=x+yi\\(x+yi)*0=(x+(-1)^y\times 0+(0+y)i=x+yi\end{cases}$. Donc $\forall z\in\mathbb{E};\ 0*z=z*0=z$. Par conséquent 0 est l'élément neutre pour la loi $*$ dans $\mathbb{E}$.

4.a. Vérifier que : $\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2;\ (x+iy)*\big((-1)^{y+1}x-yi\big)=0$.

Soit $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$, on a : $(x+iy)*\big((-1)^{y+1}x-yi\big)=x+(-1)^y\times(-1)^{y+1}x+(y-y)i=x+(-1)^{2y+1}x+0i=x+(-1)^1x=x-x=0$. (Car $(-1)^{2y}=1$).

D'où $\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2;\ (x+iy)*\big((-1)^{y+1}x-yi\big)=0$

4.b. Montrer que $(\mathbb{E},*)$ est un groupe non commutatif.

On vient de montrer dans les questions précédentes que :

★ La loi $*$ n'est pas commutative dans $\mathbb{E}$

★ La loi $*$ est associative dans $\mathbb{E}$

★ 0 est l'élément neutre pour la loi $*$ dans $\mathbb{E}$

★ Montrons que chaque élément de $\mathbb{E}$ admet un symétrique dans $\mathbb{E}$. On a vu dans la question 4.a. que : $\forall(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z};\ (x+iy)*\big((-1)^{y+1}x-yi\big)=0$ et on a : $\big((-1)^{y+1}x-yi\big)*(x+yi)=\big((-1)^{y+1}x+(-1)^{-y}x\big)+(-y+y)i=-(-1)^yx+(-1)^yx+0i=0$. Donc chaque élément $x+yi$ de $\mathbb{E}$ admet un symétrique $\big((-1)^{y+1}x-yi\big)$ pour la loi $*$ dans $\mathbb{E}$.

Alors $(\mathbb{E},*)$ est un groupe non commutatif.

Partie II :

Soient les deux ensembles $\mathbb{F}=\{x+2yi/x\in\mathbb{Z}\text{ et }y\in\mathbb{Z}\}$ et $\mathbb{G}=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}1&x&y\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}/x\in\mathbb{Z}\text{ et }y\in\mathbb{Z}\right\}$

1.a. Montrer que $\mathbb{F}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{E},*)$.

★ $\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2;\ x+2yi\in\mathbb{E}$ donc $\mathbb{F}\subset\mathbb{E}$. En plus $\mathbb{F}\neq\varnothing$ car $0=0+2\times 0i$ donc $0\in\mathbb{F}$.

★ Soit $(x',y')\in\mathbb{Z}^2$ on a d'après I-4.a., le symétrique de $x'+2y'i$ pour la loi $*$ dans $\mathbb{E}$ est $(-1)^{2y+1}x'-2yi=-x'-2y'i$. Alors $\forall(x,x',y,y')\in\mathbb{Z}^4;(x+2yi)*(x'+2y'i)^{-1}=(x+2yi)*(-x'-2y'i)=\big(x+(-1)^{2y}(-x')\big)+(2y-2y')i=(x-x')+2(y-y')i=X+2Yi$ $\left(\text{en posant }\begin{cases}X=x-x'\\Y=y-y'\end{cases}\right)$.

Donc $\forall(x,x',y,y')\in\mathbb{Z}^4;(x+2yi)*(x'+2y'i)^{-1}\in\mathbb{F}$. Par conséquent $\mathbb{F}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{E},*)$.

1.b. Montrer que la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{F}$.

Soit $(x,x',y,y')\in\mathbb{Z}^4$ on a :

★ $(x+2yi)*(x'+2y'i)=x+(-1)^{2y}x'+(2y+2y')i=(x+x')+2(y+y')i.$

★ $(x'+2y'i)*(x+2yi)=x'+(-1)^{2y'}x+(2y'+2y)i=(x'+x)+2(y'+y)i$

Puisque l'addition est commutative dans $\mathbb{Z}$ alors $(x+x')+2(y+y')i=(x'+x)+2(y'+y)i$ donc $\forall(x,x',y,y')\in\mathbb{Z}^4;(x+2yi)*(x'+2y'i)=(x'+2y'i)*(x+2yi)$. Par conséquent la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{F}$.

2. Soit φ l'application définie de $\mathbb{F}$ vers $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ par : $\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2;\ \varphi(x+2yi)=M(x,y)$

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \mathbb{F} & \to & \mathbb{M}_3(\mathbb{R})\\ & x+2yi & \mapsto & \varphi(x+2yi)=M(x,y)\end{array}$$

2.a. Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{F},*)$ vers $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}),\times)$.

★ Soit $(x,x',y,y')\in\mathbb{Z}^4$ on a : $(x+2yi)*(x'+2y'i)=x+(-1)^{2y}x'+(2y+2y')i=(x+x')+2(y+y')i.$

★ $\varphi\big((x+2yi)*(x'+2y'i)\big) = \varphi\big((x+x')+2(y+y')i\big) = M\big(x+x', y+y'\big) = \begin{pmatrix} 1 & x+x' & y+y' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

★ On a : $\varphi(x+2yi)\times\varphi(x'+2y'i) = M(x,y)\times M(x',y') = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & x' & y' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x'+x & y'+y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors $\forall(x,x',y,y')\in\mathbb{Z}^4;\ \varphi\big((x+2yi)*(x'+2y'i)\big) = \varphi(x+2yi)\times\varphi(x'+2y'i)$. Par conséquent φ est un homomorphisme de $(\mathbb{F},*)$ vers $\big(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}),\times\big)$.

2.b. Montrer que $\varphi(\mathbb{F}) = \mathbb{G}$.

★ Puisque $\forall(x,x',y,y')\in\mathbb{Z}^4;\ \varphi(x+2yi) = M(x,y)$ alors $\forall(x,x',y,y')\in\mathbb{Z}^4;\ \varphi(x+2yi)\in\mathbb{G}$. D'où $\varphi(\mathbb{F})\subset\mathbb{G}$.

★ Soit $M\in\mathbb{G}$ donc $\exists(x,y)\in\mathbb{Z}^2/M = M(x,y)$ donc $\exists(x,y)\in\mathbb{Z}^2/M = \varphi(x+2yi)$ donc $M\in\varphi(\mathbb{F})$. D'où $\forall M\in\mathbb{G};\ M\in\varphi(\mathbb{F})$. D'où $\mathbb{G}\subset\varphi(\mathbb{F})$.

Par conséquent $\varphi(\mathbb{F}) = \mathbb{G}$.

2.c. En déduire que $(\mathbb{G},\times)$ est un groupe commutatif.

Puisque $\begin{cases} \varphi \text{ est un homomorphisme de } (\mathbb{F},*) \text{ vers } \big(\mathbb{M}_3(\mathbb{R}),\times\big) \\ (\mathbb{F},*) \text{ est un groupe commutatif} \\ \varphi(\mathbb{F}) = \mathbb{G} \end{cases}$, alors $\big(\varphi(\mathbb{F}),\times\big)$ est un groupe commutatif et par conséquent $(\mathbb{G},\times)$ est un groupe commutatif.
