

Produit Scalaire Dans L'espace - 1ere Biof Scex

S. EL JAAFARI

Table des matières

I - Produit scalaire dans l'espace

I-1- Définition et notation

I-2- Orthogonalité de deux vecteurs

I-3- Symétrie et bilinéarité du produit scalaire

I-4- Norme d'un vecteur de l'espace

II- Etude analytique du produit scalaire

II-1- Base orthonormale - Repère orthonormal

II-2- Expression analytique du produit scalaire

II-3- L'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$

III- Plan défini par un point et un vecteur normal

III-1- Vecteur normal à un plan

III-2- Equation cartésienne d'un plan défini par un point et un vecteur normal

III-3- Parallélisme et orthogonalité de plans

III-4- Distance d'un point à un plan de l'espace

IV- La sphère dans l'espace

IV-1- Définition

IV-2- Equation cartésienne d'une sphère

IV-3- Représentation paramétrique d'une sphère

IV-4- Ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

IV-5- Ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

IV-6- Intersection d'une sphère et d'une droite

IV-7- Intersection d'une sphère et d'un plan

I - Produit scalaire dans l'espace

I-1- Définition et notation

définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et A, B et C trois points de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

★ Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$. Le **produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace** est le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans tout plan contenant les points A, B et C, on le note aussi $\vec{u} \cdot \vec{v}$

★ Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ par convention on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

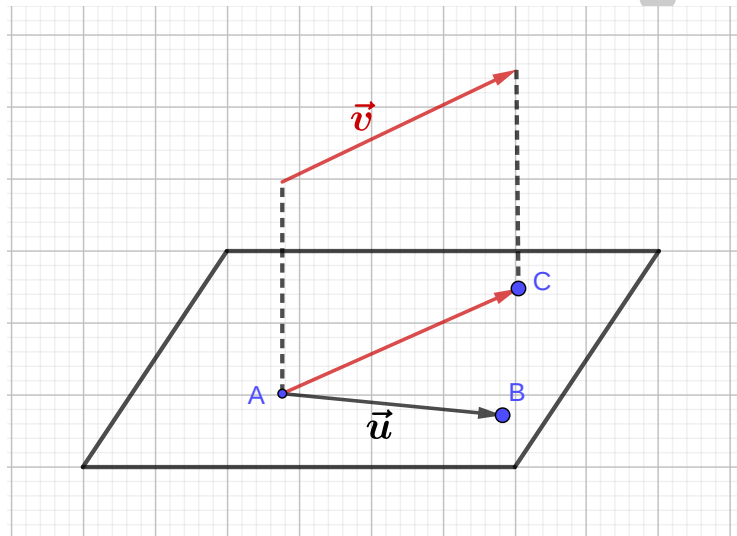


FIGURE 1 –

Remarques

Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

- Si les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont **des sens contraires**, alors : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$.
- Si les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont **de même sens**, alors : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$.

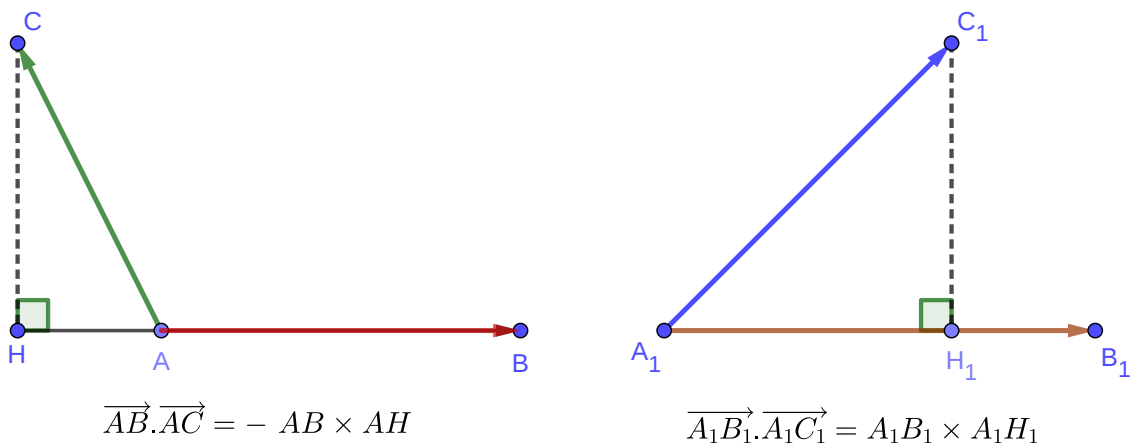


FIGURE 2 –

I-2- Orthogonalité de deux vecteurs

définition

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**, et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$ si, et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

I-3- Symétrie et bilinéarité du produit scalaire

Proposition

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\mathcal{V}_3$ et k un nombre réel. Alors :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

On dit que le produit scalaire est une opération **symétrique et bilinéaire**.

I-4- Norme d'un vecteur de l'espace

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace.

- ★ Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$ s'appelle le **carré scalaire** du vecteur $\vec{u}$ c'est un nombre réel positif qu'on note $\vec{u}^2$.
- ★ Le nombre réel positif $\sqrt{\vec{u}^2}$ est appelé la **norme du vecteur** $\vec{u}$ et on écrit : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$.

Remarques

En posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, on a : $\vec{u}^2 = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = \|\vec{u}\|^2$

Proposition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace $\mathcal{V}_3$ et k un nombre réel. Alors :

- ★ $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
- ★ $\|k\vec{u}\| = |k| \|\vec{u}\|$
- ★ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$
- ★ $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ **Inégalité triangulaire**
- ★ $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ **Inégalité de Cauchy-Schwarz**
- ★ **Identities remarquables :**

$$\begin{cases} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) \end{cases}$$

II- Etude analytique du produit scalaire

II-1- Base orthonormale - Repère orthonormal

Définition

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- ★ La base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthogonale** si, et seulement si $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$.

- ★ La base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthonormale** si, et seulement si $\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \end{cases}$
- ★ Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthogonal** si, et seulement si la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthogonale
- ★ Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthonormal (ou orthonormé)** si, et seulement si la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormale.

II-2- Expression analytique du produit scalaire

Proposition 1

Dans l'espace $\mathcal{V}_3$ rapporté à une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$. Alors :

- ★ $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.
- ★ $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Proposition 2

Dans l'espace $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$. Alors :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

II-3- L'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$

Proposition

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $\vec{u}(a, b, c)$ un vecteur non nul et A un point et k un nombre réel.

L'ensemble des point $M(x, y, z)$ de l'espace $\mathcal{E}$ tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ est un plan dont une équation cartésienne est : $ax + by + cz + d = 0$.

III- Plan défini par un point et un vecteur normal

III-1- Vecteur normal à un plan

Définition

Soit $\vec{n}$ un vecteur de l'espace et $(\mathcal{P})$ un plan.

On dit que $\vec{n}$ **est un vecteur normal au plan** $(\mathcal{P})$ si, et seulement si toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est perpendiculaire à $(\mathcal{P})$.

III-2- Equation cartésienne d'un plan défini par un point et un vecteur normal

Proposition

Soient a, b, c et d quatre nombres réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

- ★ Tout plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ a une équation cartésienne de la forme : $ax + by + cz + d = 0$
- ★ Inversement, l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que : $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.

III-3- Parallélisme et orthogonalité dans l'espace

Proposition

Soient $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ et soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace de vecteur directeur $\vec{u}$. Alors :

- ★ $(\mathcal{P}) \parallel (\mathcal{P}') \Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.
- ★ $(\mathcal{P}) \perp (\mathcal{P}') \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}'$.
- ★ $(\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n}$.
- ★ $(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

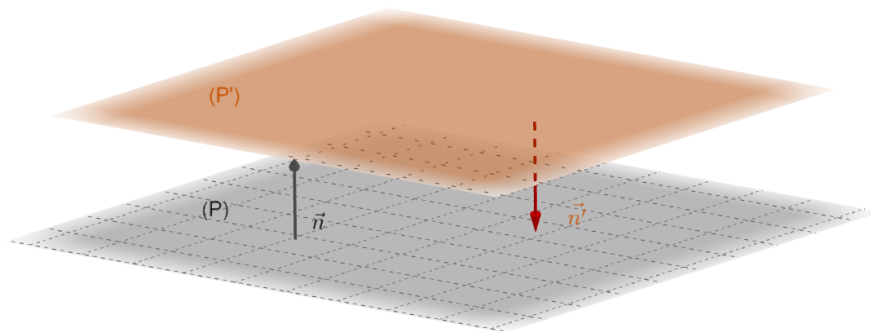


FIGURE 3 – $(P) \parallel (P')$

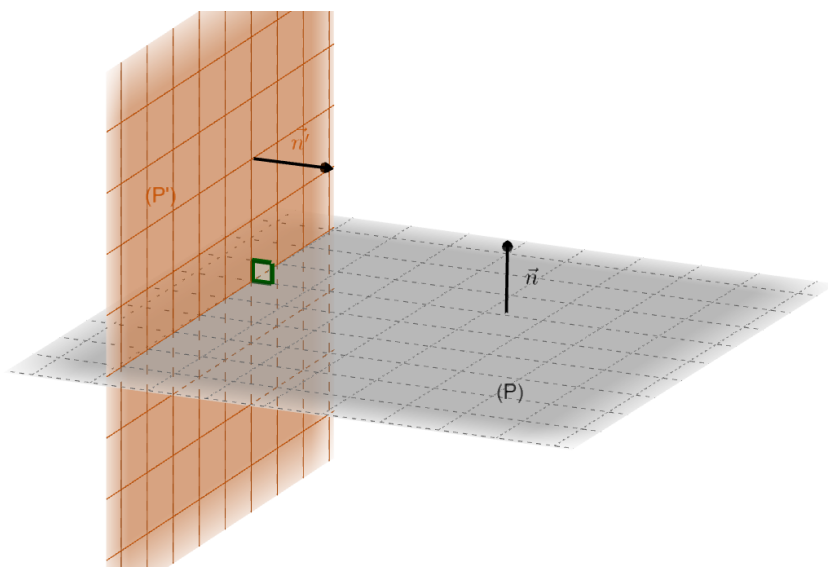


FIGURE 4 – $(P) \perp (P')$

III-4- Distance d'un point à un plan de l'espace

Définition

Soit (P) un plan et A un point de l'espace.

La distance du point A au plan (P) notée $d(A, (P))$ est la distance AH où H est le projeté orthogonal de A sur (P) : $d(A, (P)) = AH$.

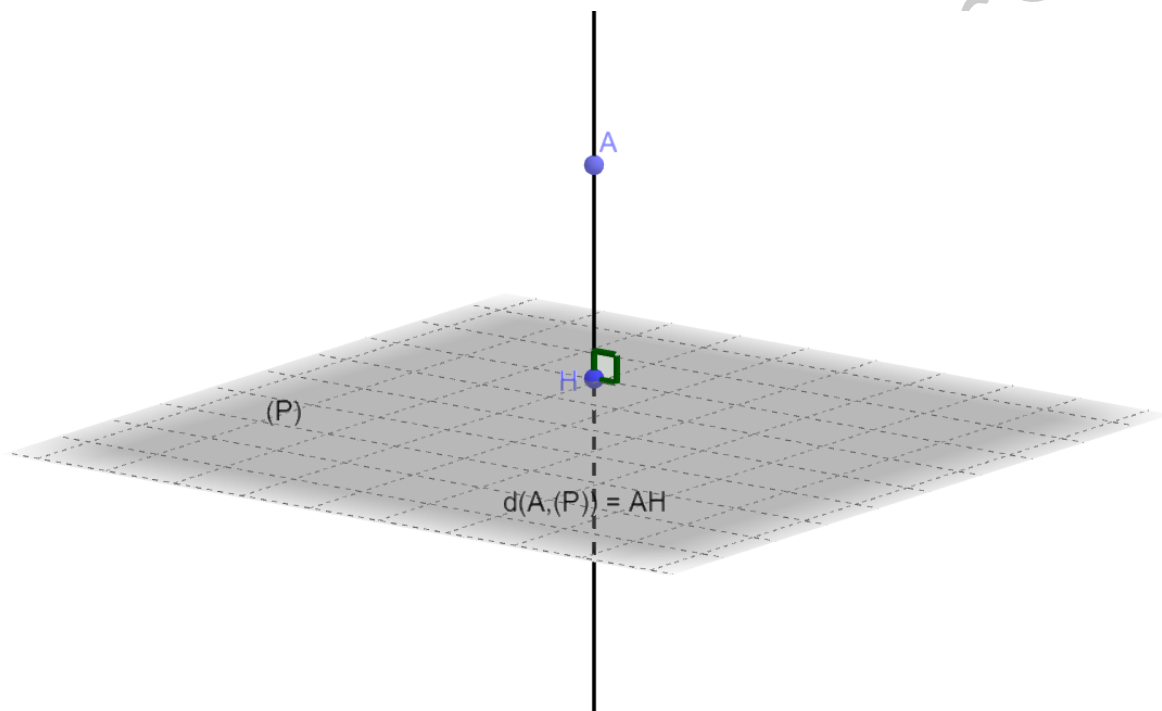


FIGURE 5 – $d(A, (P)) = AH$

Proposition

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et (P) un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$. Alors :

$$d(A, (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

IV- La sphère dans l'espace

IV-1- Définition

Définition

Soit Ω un point de l'espace et R un nombre réel positif.

La sphère de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\Omega M = R$. On la note $\mathcal{S}(\Omega, R)$.

En plus si A et B sont deux points de la sphère $\mathcal{S}(\Omega, R)$, on dit que le segment $[AB]$ est un diamètre de la sphère $\mathcal{S}(\Omega, R)$ si le centre Ω est le milieu du segment $[AB]$.

IV-2- Equation cartésienne d'une sphère

Proposition

Dans l'espace $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé, on considère un point $\Omega(a, b, c)$ et R est un nombre réel positif.

Une **équation cartésienne** de la sphère $\mathcal{S}(\Omega, R)$ est donnée par :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 0$$

IV-3- Représentation paramétrique d'une sphère

Proposition

Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre un point $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R .

- $M(x, y, z) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + R \sin \varphi \cos \theta \\ y = b + R \sin \varphi \sin \theta \\ z = c + R \cos \varphi \end{cases}$
- Le système précédent est appelé **une représentation paramétrique** de la sphère $\mathcal{S}$.

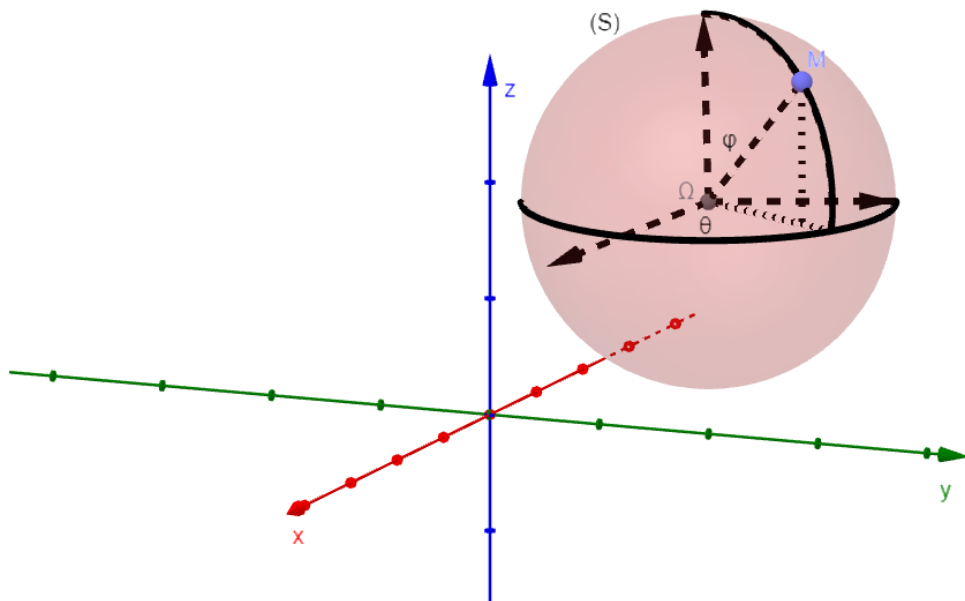


FIGURE 6 – $\mathcal{S}(\Omega, R)$

IV-4- Ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 =$

Proposition

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ où a, b, c et d sont des nombres réels.

- ★ Si $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$, alors $\mathcal{S}$ est la sphère de centre le point $\Omega(a, b, c)$ et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.
- ★ Si $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$, alors $\mathcal{S} = \{\Omega(a, b, c)\}$.
- ★ Si $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$, alors $\mathcal{S} = \emptyset$.

IV-5- Ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Proposition

Soient A et B deux points distincts de l'espace $\mathcal{E}$.

- ★ L'ensemble $\mathcal{S}$ des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$.
- ★ Une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$ est donnée par :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$

IV-6- Intersection d'une sphère et d'une droite

Proposition

Soit $\mathcal{S}(\Omega, R)$ une sphère et $(\mathcal{D})$ une droite de l'espace $\mathcal{E}$.

Soit H le projeté orthogonal de Ω sur $(\mathcal{D})$ et $d = d(\Omega, (\mathcal{D}))$.

- ★ si $d > R$, alors $(\mathcal{D}) \cap \mathcal{S} = \emptyset$. On dit dans ce cas que la droite $(\mathcal{D})$ est à l'**extérieur** de la sphère $\mathcal{S}$.
- ★ Si $d = R$, alors $(\mathcal{D}) \cap \mathcal{S} = \{H\}$. On dit dans ce cas que la droite $(\mathcal{D})$ est **tangente** à la sphère $\mathcal{S}$ au point H.
- ★ Si $d < R$, alors $(\mathcal{D}) \cap \mathcal{S} = \{A, B\}$. On dit dans ce cas que la droite $(\mathcal{D})$ **perce** la sphère $\mathcal{S}$ aux deux points A et B.

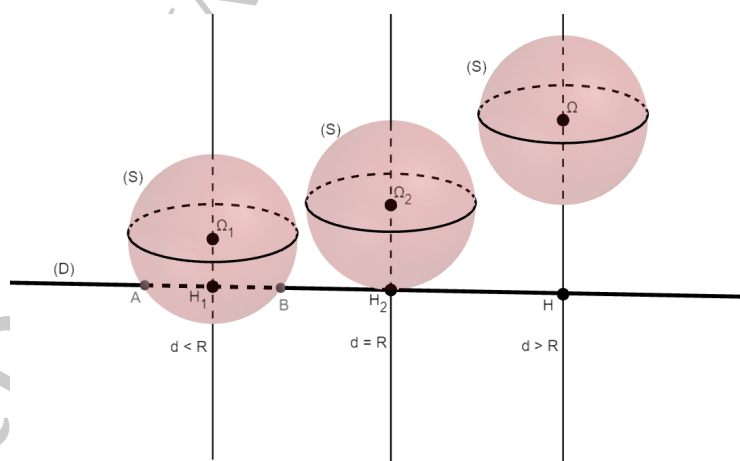


FIGURE 7 – $(S) \cap (D)$

IV-7- Intersection d'une sphère et d'un plan

Proposition :

Soit $S(\Omega, R)$ une sphère et (P) un plan de l'espace $\mathcal{E}$.

Soit H le projeté orthogonal de Ω sur (P) et $d = d(\Omega, (P))$.

★ si $d > R$, alors $(P) \cap S = \emptyset$. On dit dans ce cas que le plan (P) est à l'extérieur de la sphère S .

★ Si $d = R$, alors $(P) \cap S = \{H\}$. On dit dans ce cas que le plan (P) est **tangent** à la sphère S au point H .

★ Si $d < R$, alors $(P) \cap S = \mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. On dit dans ce cas que le plan (P) **coupe la sphère** S selon le cercle $\mathcal{C}(H, \sqrt{R^2 - d^2})$.

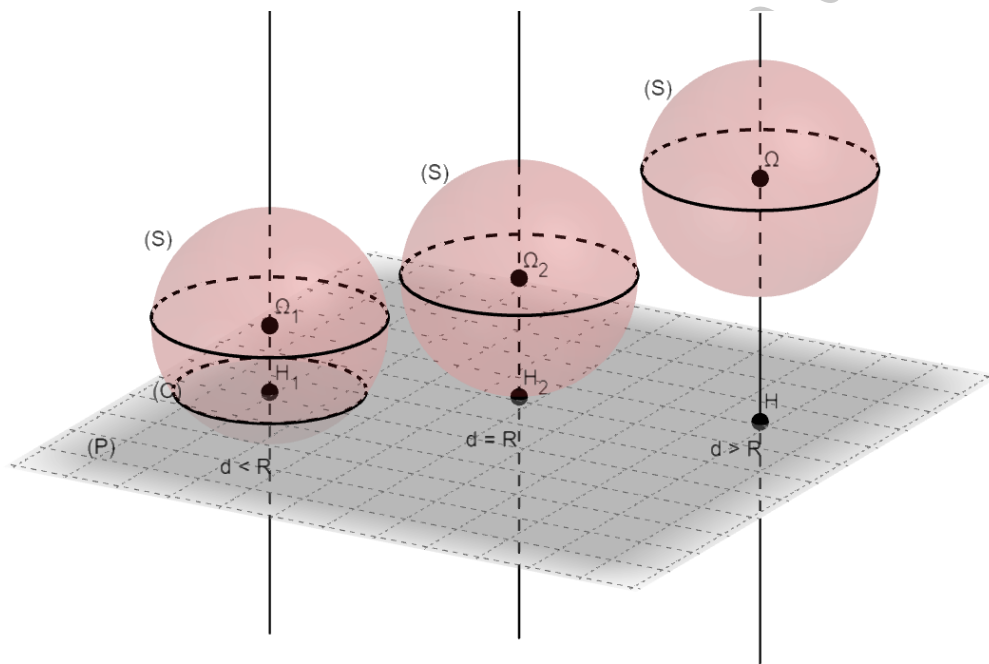


FIGURE 8 – $(S) \cap (P)$