S. EL JAAFARI

Table des matières

I - Coordonnées d'un point dans repère

- Coordonnées d'un vecteur dans une base

I.1. Base et repère de l'espace

I.2. Coordonnées d'un point dans un repère de l'espace $\mathcal{E}$

I.3. Coordonnées d'un vecteur dans une base de l'espace $\mathcal{V}_3$

II - Condition de colinéarité de deux vecteurs

- Condition de coplanarité de trois vecteurs

II.1. Condition de colinéarité de deux vecteurs

II.2. Condition de coplanarité de tois vecteurs

III - Etude analytique d'une droite de l'espace

III.1. Représentation paramétrique d'une droite

III.2. Equations cartésiennes d'une droite

IV - Etude analytique d'un plan de l'espace

IV.1. Représentation paramétrique d'un plan

IV.2. Equation cartésienne d'un plan

V - Positions relatives de droites et plans de l'espace

V.1. Positions relatives de deux droites

V.2. Positions relatives d'une droite et d'un plan

V.3. Positions relatives de deux plans

I - Coordonnées d'un point dans repère - Coordonnées d'un vecteur dans une base

I.1. Base et repère de l'espace

Définition :

Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace $\mathcal{V}_3$ et O un point de l'espace $\mathcal{E}$.

- ★ Le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelé **une base de l'espace** $\mathcal{V}_3$.
- ★ Le quadruplet $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelé **un repère de l'espace** $\mathcal{E}$

Remarque :

- ★ Quatre points non coplanaires de l'espace O, A, B et C déterminent un repère de l'espace.
- ★ $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est un repère de de l'espace $\mathcal{E}$ (par exemple)

I.2. Coordonnées d'un point dans un repère de l'espace

Théorème et définition :

Soit $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ un repère de l'espace $\mathcal{E}$.

- ★ Pour tout point M de l'espace $\mathcal{E}$ il existe un triplet (x, y, z) de nombres réels tel que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
- ★ Le triplet (x, y, z) est appelé **triplet de coordonnées** du point M dans le repère $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$.
- ★ **x est l'abscisse** du point M, **y est l'ordonnée** du point M , **z est la cote** du point M et on note $M(x; y; z)$ ou $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

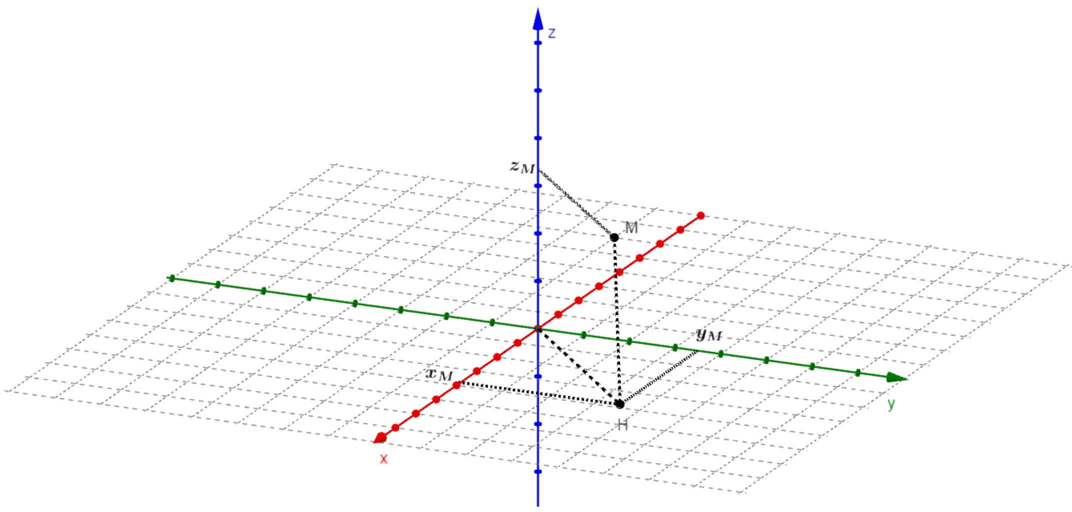

FIGURE 1 –

I.3. Coordonnées d'un vecteur dans une base de l'espace

Théorème et définition :

L'espace $\mathcal{V}_3$ est muni d'une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

★ Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace $\mathcal{V}_3$ il existe un triplet (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tel que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

★ Le triplet (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ est appelé **triplet de coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

★ **x est l'abscisse** du vecteur $\vec{u}$, **y est l'ordonnée** du vecteur $\vec{u}$, **z est la cote** du vecteur $\vec{u}$ et on note $M(x;y;z)$ ou $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

Propriétés :

★ Soient $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ dans une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de $\mathcal{V}_3$.

- $\vec{u}=\vec{v} \Leftrightarrow \{\, x=x' \text{ et } y=y' \text{ et } z=z' \,\}$
- Les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ sont $(x+x',y+y',z+z')$.
- Pour tout réel α , les coordonnées du vecteur $\alpha\vec{u}$, sont $(\alpha x,\alpha y,\alpha z)$.

★ Soient $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$ deux points de l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$.
- Les coordonnées du point I le milieu du segment $[AB]$ sont ; $\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

II - Condition de colinéarité de deux vecteurs - Condition de coplanarité de trois vecteurs

II.1. Condition de colinéarité de deux vecteurs

Définition :

Soient $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(a',b',c')$ deux vecteurs de l'espace $\mathcal{V}_3$ muni d'une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Les nombres réels $\Delta_1=\begin{vmatrix}a & a'\\ b & b'\end{vmatrix}=ab'-a'b$ et $\Delta_2=\begin{vmatrix}a & a'\\ c & c'\end{vmatrix}=ac'-a'c$ et $\Delta_3=\begin{vmatrix}b & b'\\ c & c'\end{vmatrix}=bc'-b'c$ s'appellent **les déterminants extraits** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Proposition :

Soient $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(a',b',c')$ deux vecteurs de l'espace $\mathcal{V}_3$ muni d'une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si Les nombres réels $\Delta_1=\begin{vmatrix}a & a'\\ b & b'\end{vmatrix}=0$ et $\Delta_2=\begin{vmatrix}a & a'\\ c & c'\end{vmatrix}=0$ et $\Delta_3=\begin{vmatrix}b & b'\\ c & c'\end{vmatrix}=0$.

II.2. Condition de coplanarité de tois vecteurs

Définition :

Soient $\vec{u}(a,b,c)$, $\vec{v}(a',b',c')$ et $\vec{w}(a'',b'',c'')$ trois vecteurs de l'espace $\mathcal{V}_3$ muni d'une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans cet ordre est le nombre réel, noté $det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ défini par :

$$det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$$

Proposition :

Soient $\vec{u}(a,b,c)$, $\vec{v}(a',b',c')$ et $\vec{w}(a'',b'',c'')$ trois vecteurs de l'espace $\mathcal{V}_3$ muni d'une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si : $det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$

III - Etude analytique d'une droite de l'espace

III.1. Représentation paramétrique d'une droite

Théorème et définition :

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soit $A(x_A,y_A,z_A)$ de $\mathcal{E}$ et $\vec{u}(a,b,c)$ un vecteur non nul.
Un point $M(x,y,z)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Ce système est appelé **une représentation paramétrique** de la droite $\mathcal{D}$.

Remarque :

- ⋆ Chaque droite de l'espace possède une infinité de représentations paramétriques.
- ⋆ Une représentation paramétrique d'une demi-droite est la même que celle d'une droite sauf pour les valeurs prises par le paramètre t, on le prendra dans l'un des intervalles $[\alpha,+\infty[\,,\,]\alpha,+\infty[\,,\,]-\infty,\alpha]\,,\,]-\infty,\alpha[$.
- ⋆ Pour un segment, on prendra t dans l'intervalle $[\alpha,\beta[$

III.2. Equations cartésiennes d'une droite

Définition :

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par un point $A(x_A,y_A,z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a,b,c)$.

- ⋆ Si $abc \neq 0$, le système : $\frac{x-x_A}{a} = \frac{y-y_A}{b} = \frac{z-z_A}{c}$ est appelé **équations cartésiennes** de la droite $\mathcal{D}$.
- ⋆ Si $ab \neq 0$ et $c = 0$, le système $\begin{cases} \frac{x-x_A}{a} = \frac{y-y_A}{b} \\ z - z_A = 0 \end{cases}$ est appelé **équations cartésiennes**

de la droite $\mathcal{D}$.

★ Si $a = b = 0$ et $c \neq 0$, le système $\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A \end{cases}$ est appelé **équations cartésiennes** de la droite $\mathcal{D}$.

IV - Etude analytique d'un plan de l'espace

IV.1. Représentation paramétrique d'un plan

Théorème et définition :

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soit $\mathcal{P}$ la plan passant par un point $A(x_A,y_A,z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(a',b',c')$.

★ $M(x,y,z) \in \mathcal{P} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (t,k) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x = x_A + at + a'k \\ y = y_A + bt + b'k \\ z = z_A + ct + c'k \end{cases}$.

★ Le système $\begin{cases} x = x_A + at + a'k \\ y = y_A + bt + b'k \\ z = z_A + ct + c'k \end{cases} \quad (t,k) \in \mathbb{R}^2$ est appelé **une représentation paramétrique** du plan $\mathcal{P}$.

Remarque :
Chaque plan de l'espace possède une infinité de représentations paramétriques.

IV.2. Equation cartésienne d'un plan

Théorème et définition :

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soit $\mathcal{P}$ la plan passant par un point $A(x_A,y_A,z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ et $\vec{v}(\alpha',\beta',\gamma')$.

★ $M(x,y,z) \in \mathcal{P} \quad \Leftrightarrow \quad det(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - x_A & \alpha & \alpha' \\ y - y_A & \beta & \beta' \\ z - z_A & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax + by + cz + d = 0$

où $a = \begin{vmatrix} \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix}; b = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix}; c = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}; d = -(ax_A + by_A + cz_A)$

★ L'équation $ax + by + cz + d = 0$ est appelée **une équation cartésienne** du plan $\mathcal{E}$.

Remarques :

- Tout plan de l'espace possède une infinité d'équations cartésiennes.
- Soient A, B et C trois points de l'espace. Alors une équation du plan (ABC) est donnée par :
$M(x,y,z) \in (ABC) \quad \Leftrightarrow \quad det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 0$
- Si l'espace est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
  - ★ Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1(O;\vec{i},\vec{j})$ est $z = 0$.
  - ★ Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2(O;\vec{j},\vec{k})$ est $x = 0$
  - ★ Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_3(O;\vec{i},\vec{k})$ est $y = 0$

V - Positions relatives de droites et plans de l'espace

V.1. Positions relatives de deux droites.

Proposition :

Soient $(D) = \mathcal{D}(A,\vec{u})$ et $(D') = \mathcal{D}(B,\vec{v})$ deux droites de l'espace.

★ Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $\{ A \in (D')$ ou $B \in (D) \}$, alors les droites (D) et (D') sont confondues.

★ Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $A \notin (D')$, alors les droites (D) et (D') sont strictement parallèles.

★ Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et $det(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}) = 0$, alors les droites (D) et (D') sont sécantes.

★ Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et $det(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}) \neq 0$, alors les droites (D) et (D') ne sont pas coplanaires.

V.2. Positions relatives d'une droite et d'un plan.

Proposition 1 :

Soient $(D) = \mathcal{D}(A,\vec{u})$ une droite et $(P) = \mathcal{P}(B,\vec{v},\vec{w})$ un plan de l'espace $\mathcal{E}$.

★ Si $det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$ et $A \in (P)$, alors $(D) \subset (P)$

★ Si $det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$ et $A \notin (P)$, alors la droite (D) est strictement parallèle au plan (P).

★ Si $det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \neq 0$ alors la droite (D) coupe le plan (P) en un seul point.

Proposition 2 :

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère une droite $\mathcal{D}$ passant par un point $A(x_A,y_A,z_A)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$, et un plan (P) d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$. Alors :

$$\mathcal{D} \parallel (P) \quad \Leftrightarrow \quad a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \,.$$

V.3. Positions relatives de deux plans.

Proposition :

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soient (P) et (P') deux plans de l'espace définis paar leur équation cartésienne : $(P) : ax+by+cz+d = 0$ et $(P') : a'x+b'y+c'z+d' = 0$.Alors :

$$(P) \parallel (P') \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0 \right)$$

En particulier, si $abc \neq 0$, alors :

$$(P) \parallel (P') \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$

Remarque :

Les plans (P) et (P') ne sont pas parallèles $\Leftrightarrow \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ou } \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ou } \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0 \right)$