Chapitre 17 : Le produit vectoriel dans l'espace

1ere BIOF SM .... **S. EL JAAFARI**

Table des matières

I- ORIENTATION DE L'ESPACE

I-1- TRIEDRE

DEFINITION

Un trièdre est une figure géométrique formée par trois demi-droites non coplanaires $[Ox);[Oy);[Oz)$. de même origine O. On le note (Ox, Oy, Oz). Les demi-droites $[Ox);[Oy);[Oz)$. s'appellent **les arêtes** du trièdre (Ox, Oy, Oz) et les plans $xOy; yOz$ et zOx sont appelés **les faces** du trièdre.

I-2- REPERE ORIENTE DE L'ESPACE

DEFINITION 1

Soient O, I, J et K quatre points non coplanaires de l'espace.
⋆ **Le bonhomme d'Ampère** lié au trièdre $([OI),[OJ),[OK))$ est un personnage imaginaire debout sur la demi-droite $[OK)$ en ayant les pieds à l'origine O et regarde vers le point I.
⋆ Si **le bonhomme d'Ampère a le point J à sa droite**, on dit que le trièdre $([OI),[OJ),[OK))$ **est indirect** .
⋆ Si **le bonhomme d'Ampère a le point J à sa gauche**, on dit que le trièdre $([OI),[OJ),[OK))$ **est direct** .

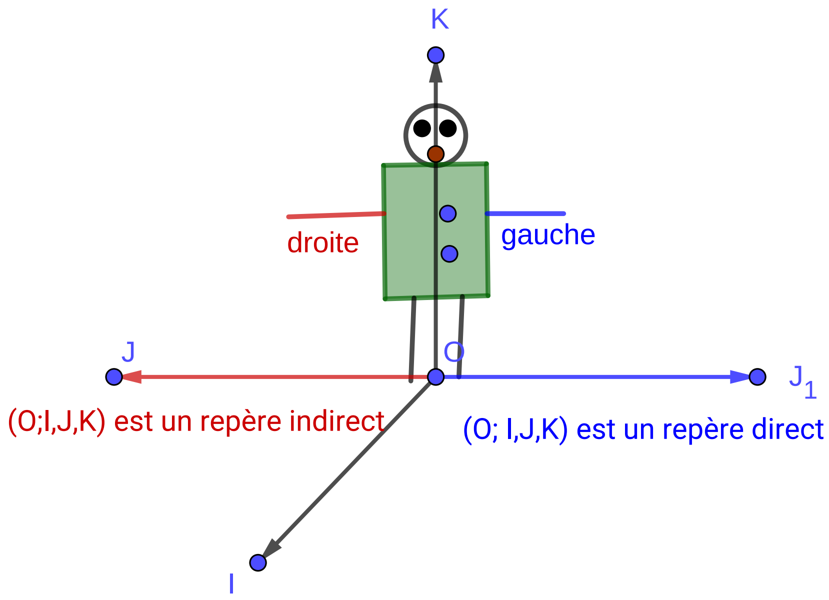

FIGURE 1 – bonhomme d'Ampère

DEFINITION 2

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On pose $\overrightarrow{OI} = \vec{i}; \overrightarrow{OJ} = \vec{j}; \overrightarrow{OK} = \vec{k}$.
⋆ On dit que le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est **direct** si le trièdre $([OI),[OJ),[OK))$ est direct. Dans ce cas on dit aussi que la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est directe.
⋆ On dit que le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est **indirect** si le trièdre $([OI),[OJ),[OK))$ est indirect. Dans ce cas on dit aussi que la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est indirecte.
⋆ On dit que l'espace $\mathcal{E}$ est **orienté positivement** lorsqu'il est muni d'un repère direct.

PROPOSITION

Si le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. est orthonormal direct, alors :

- ★ Les repères $(O,\vec{j},\vec{k},\vec{i})$ et $(O,\vec{k},\vec{i},\vec{j})$ sont directs.
- ★ Les repères $(O,\vec{i},\vec{k},\vec{j})$, $(O,\vec{j},\vec{i},\vec{k})$ et $(O,\vec{k},\vec{j},\vec{i})$ sont indirects.
- ★ Les repères $(O,-\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $(O,\vec{i},-\vec{j},\vec{k})$ et $(O,\vec{i},\vec{j},-\vec{k})$ sont indirects.

REMARQUE :

Soit O un point quelconque de l'espace $\mathcal{E}$, alors : $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un rpère direct $\Leftrightarrow$ la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est directe.

II- PRODUIT VECTORIEL DE L'ESPACE

II-1- DEFINITION

DEFINITION

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté tels que : $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.

♣ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors **le produit vectoriel** desn vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, dans cet ordre, noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$, est le vecteur $\vec{w}=\overrightarrow{OC}$ défini par :

- ► La droite (OC) est perpendiculaire au plan (OAB).
- ► Le trièdre $([OA),[OB),[OC))$ est direct.
- ► $\|\overrightarrow{OC}\| = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times sin(\widehat{AOB})$.

♣ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$

REMARQUE :

Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est indépendant du choix du point O.

PROPOSITION

- ★ Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{V}_3$ on a : $\vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{0}$ et $\vec{u}\wedge\vec{0}=\vec{0}$
- ★ Si $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$, alors : $\vec{w}\perp\vec{u}$ et $\vec{w}\perp\vec{v}$ et $\|\vec{u}\wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |sin\,(\widehat{\vec{u};\vec{v}})\,|$
- ★ Si $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$, alors : la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est directe.
- ★ Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.

II-2- INTERPRETATION GEOMETRIQUE DU PRODUIT VECTORIEL

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté tels que : $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ et $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$. Le réel $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$ **est l'aire du parallélogramme construit avec les trois points O, A, B.**

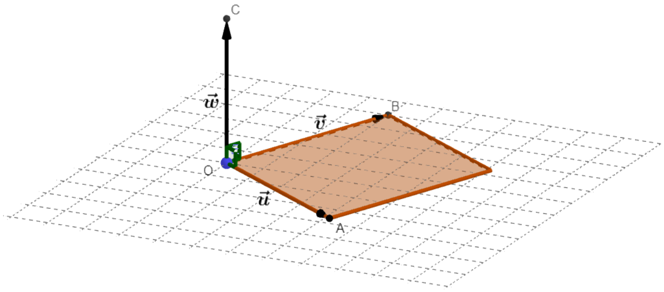

Figure2

III- PROPRIETES DU PRODUIT VECTORIEL

III-1- ANTYSYMETRIE DU PRUDUIT VECTORIEL

PROPOSITION

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace orienté et tout nombre réel α, on a : $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$.
On dit que le produit vectoriel est **antisymétrique**.

III-2- BILINEARITE DU PRUDUIT VECTORIEL

PROPOSITION

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace orienté et α un nombre réel . Alors :

- ♠ $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \wedge\vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
- ♠ $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \wedge\vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$
- ♠ $\vec{u} \wedge (\alpha\vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$

III-3- EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRUDUIT VECTORIEL

PROPOSITION

L'espace $\mathcal{V}_3$ est rapporté à une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs de $\mathcal{V}_3$. Alors :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

IV- APPLICATIONS DU PRODUIT VECTORIEL

IV-1- Aire d'un triangle

PROPOSITION

Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace orienté $\mathcal{E}$.
L'aire du triangle ABC est : $S_{ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$

IV-2- Equation cartésienne d'un plan défini par trois points non alignés

PROPOSITION

Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace orienté $\mathcal{E}$. On a :

$$M \in (ABC) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$$

REMARQUE :

Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

IV-3- Intersection de deux plans de l'espace

PROPOSITION

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans sécants suivant un droite $\mathcal{D}$ dans l'espace orienté $\mathcal{E}$.
Soit $\vec{n}$ in vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ et $\vec{n}'$ un vecteur normal au plan $\mathcal{P}'$. Alors :
$\vec{n} \wedge \vec{n}'$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

IV-4- DISTANCE D'UN POINT à UNE DROITE

PROPOSITION

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par un point A et dirigée par un vecteur non nul $\vec{u}$.
La distance d'un point M de l'espace à la droite $\mathcal{D}$ est donnée par :

$$d(M,(\mathcal{D})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$