Chap13 : PRODUIT SCALAIRE DANS LE PLAN

TABLES DES MATIERES

1- DEFINITION DU PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS

DEFINITION 1

Soient A, B et C trois points du plan et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) tel que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens.
Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le nombre réel $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ = **AB×AH**, et se lit $\overrightarrow{AB}$ **scalaire** $\overrightarrow{AC}$

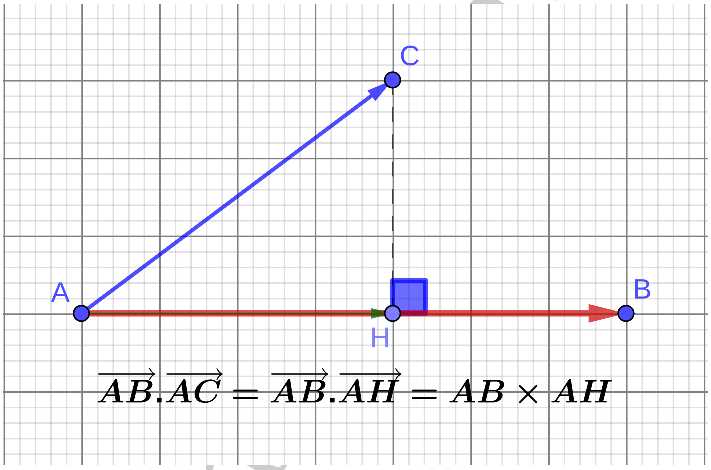


Figure 1 : $H \in [AB]$

DEFINITION 2

Soient A, B et C trois points du plan et K le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) tel que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK}$ ont des sens opposés.
Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le nombre réel $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ = **- AB×AK** et se lit $\overrightarrow{AB}$ **scalaire** $\overrightarrow{AC}$

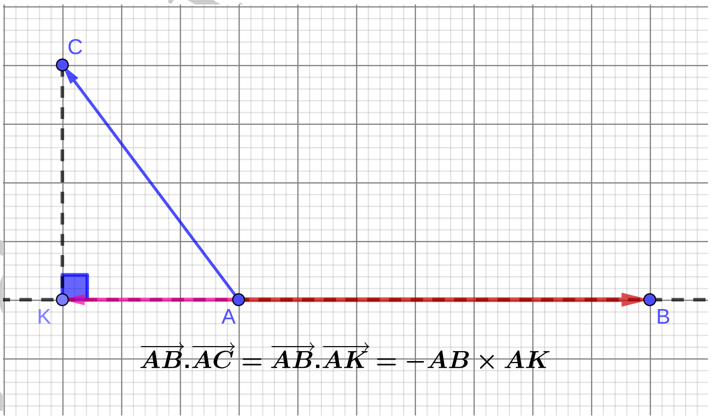


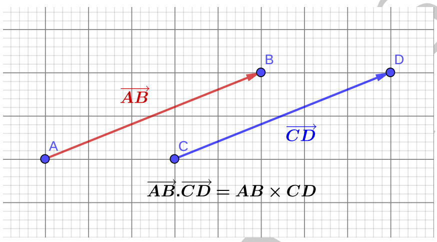
Figure 2 : $K \notin [AB]$

Remarques :

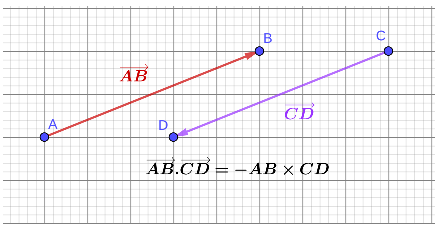
▲ Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ deux vecteurs **colinéaires**, alors :

$$\begin{cases} \vec{u}.\vec{v} = AB \times CD; & si\ \vec{u}\ et\ \vec{v} \text{ sont de même sens} \\ \vec{u}.\vec{v} = -AB \times CD; & si\ \vec{u}\ et\ \vec{v} \text{ ont des sens opposés.} \end{cases}$$

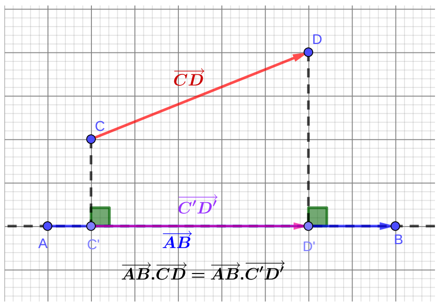
▲ Soient A, B, C et D quatre points du plan. Alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$ où C' et D' sont les projetés orthogonaux respectifs des points C et D sur la droite (AB) .



(a) Figure 3



(b) Figure 4



(c) Figure 5

2- NORME D'UN VECTEUR

DEFINITION

Soient A et B deux points du plan. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

- Puisque B est le projeté orthogonal de B sur la droite (AB), alors $\vec{u}.\vec{u} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB \times AB = AB^2$.
- On a : $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2$, appelé le carré scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$.
- $\vec{u}^2$ et $\overrightarrow{AB}^2$ sont des nombres positifs.
- On a : $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2$. D'où $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.
- De même $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ d'où $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$.

REMARQUE

La norme $\|\vec{u}\|$ du vecteur $\vec{u}$ est sa longueur.

3- FORMULE TRIGONOMETRIQUE DU PRODUIT SCALAIRE

PROPOSITION

⋇ Soient A, B et C trois points du plan tels que $A \neq B$ et $A \neq C$. Alors on a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times cos(\widehat{BAC})$$

⋇ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\overline{\vec{u};\vec{v}})$$

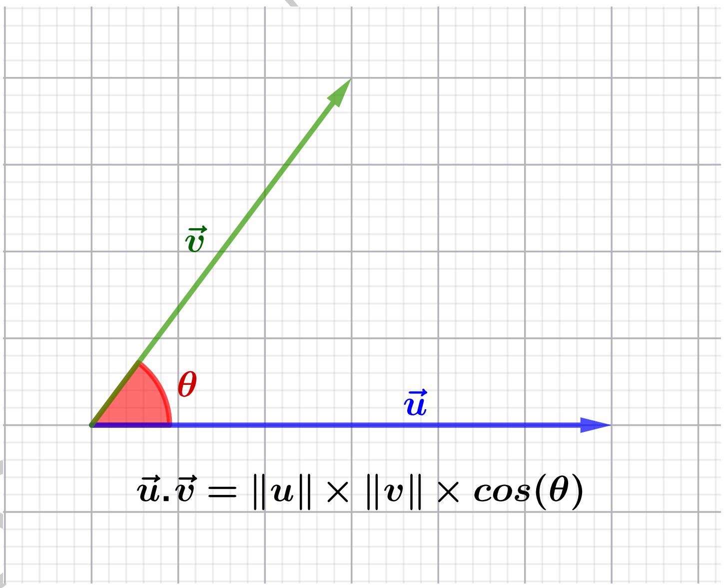


Figure 2 – Formule trigonométrique du produit scalaire

4- PROPRIETES DU PRODUIT SCALAIRE

PROPRIETES DU PRODUIT SCALAIRE

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout nombre réel k, on a :

⊛ $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

⊛ $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

⊛ $\vec{u}.(k\vec{v}) = (k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$

⊛ $\vec{u}^2 \geq 0$

⊛ $\vec{u}^2 = 0$ si, et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$

PROPOSITION : IDENTITES REMARQUABLES

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques. Alors, on a :

⊛ $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

⊛ $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

⊛ $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

EXPRESSIONS DU PRODUIT SCALAIRE

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques et A, B, C et D quatre points du plan.

① $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)$

② $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

③ $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

④ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$ où C' et D' sont les projetés orthogonaux respectifs des points C et D sur la droite (AB)

PROPOSITION

Soit ABC un triangle. Alors, on a :

★ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$

★ $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(BA^2 + BC^2 - AB^2\right)$

★ $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\left(CA^2 + CB^2 - AB^2\right)$

5- ORTHOGONALITE ET PRODUIT SCALAIRE

PROPOSITION

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques.

⋇ Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors : $\vec{u}.\vec{v} = 0$

⋇ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Autrement dit : $\vec{u} \perp \vec{v}$ si, et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

6- RELATIONS METRIQUES DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

PROPOSITION

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). Alors, on a :

- $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Théorème de Pythagore)
- $BA^2 = BH \times BC$ et $CA^2 = CH \times CB$

- $HA^2 = HB \times HC$

Ces relations sont appelées **les relations métriques dans le triangle rectangle ABC**

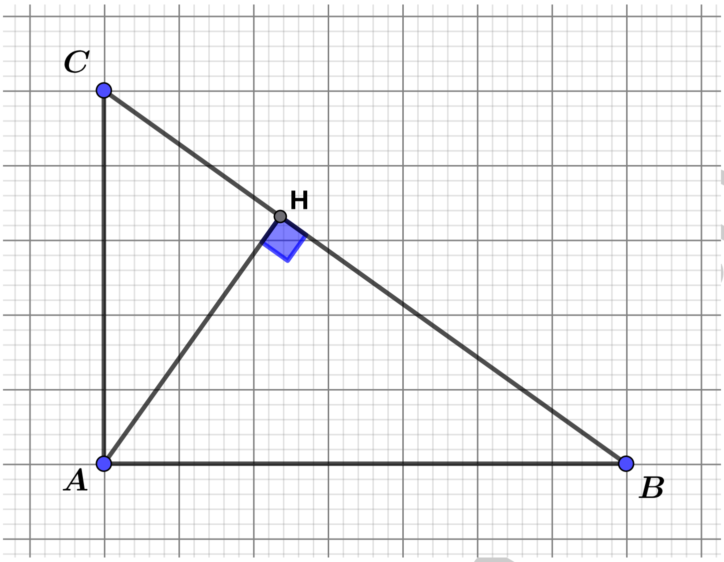


FIGURE 3 – Triangle rectangle en A

7- THEOREME D'AL KASHI

THEOREME D'AL KASHI

Dans un triangle ABC tel que $AB = c, AC = b$ et $BC = a$, on a :

- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times cos(\widehat{A})$ ou encore : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times cos(\widehat{A})$
- $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \times CB \times cos(\widehat{C})$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times cos(\widehat{C})$
- $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \times BC \times cos(\widehat{B})$ et $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times cos(\widehat{B})$.

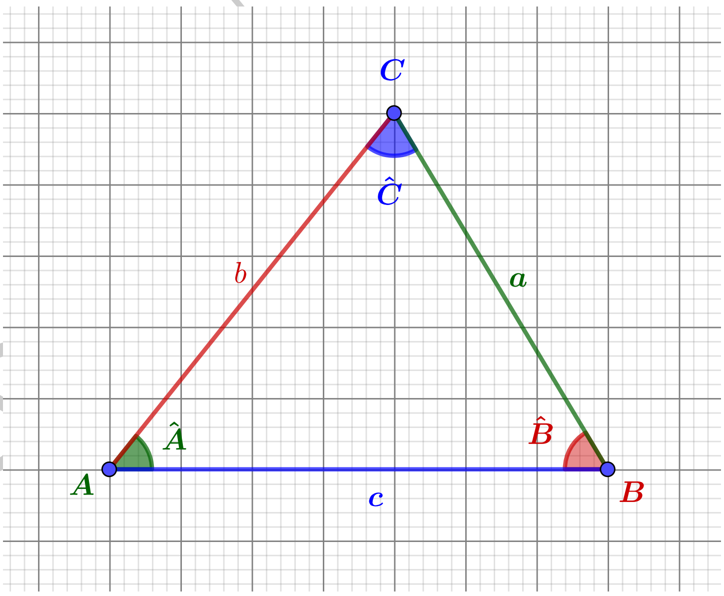


FIGURE 4

REMARQUES

- Dans un triangle non aplati, lorsqu'on connaît les longueurs de ses trois côtés on peut calculer les mesures de ses angles : $cos(\widehat{A}) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.
- Lorsqu'on connaît les longueurs de deux côtés d'un triangle et une mesure de l'angle formé par ses côtés, on peut calculer la longueur du troisième côté : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times cos(\widehat{C})$.

8- THEOREME DE LA MEDIANE

THEOREME DE LA MEDIANE

Soit $[AB]$ un segment et I son milieu. Alors pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

.

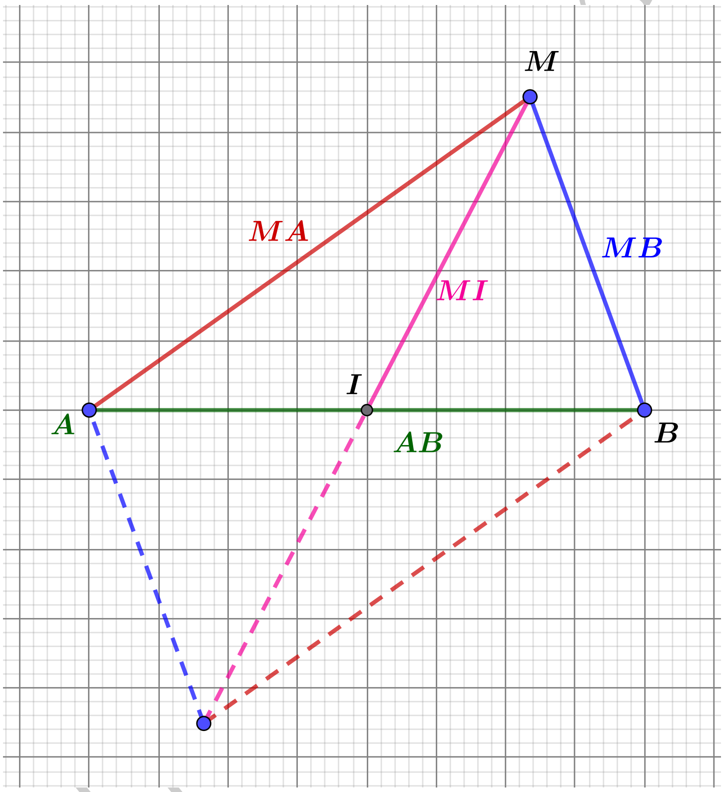


Figure 5

8- AIRE D'UN TRIANGLE ET FORMULES DES SINUS

PROPOSITION

Soit ABC un triangle et S son aire. Alors, on a :
- $S = \frac{1}{2}ab \times sin(\widehat{C}) = \frac{1}{2}ac \times sin(\widehat{B}) = \frac{1}{2}bc \times sin(\widehat{A})$
- $\frac{sin(\widehat{A})}{a} = \frac{sin(\widehat{B})}{b} = \frac{sin(\widehat{C})}{c} = \frac{2S}{abc}$.