

Chapitre 12 :

TRANSFORMATIONS DU PLAN**TABLE DES MATIERES****I- Transformations dans le plan****II- Symétrie axiale****III- Symétrie centrale****IV- Translation****V- Homothétie**

I- TRANSFORMATION DANS LE PLAN

DEFINITION 1

Une transformation du plan $\mathcal{P}$ est une application T du plan $\mathcal{P}$ dans lui même qui associe à chaque point M du plan $\mathcal{P}$ un point M' , on écrit $T(M) = M'$, qui vérifie une ou plusieurs conditions. On écrit aussi :

$$\begin{aligned} T : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ M &\longmapsto T(M) = M' \end{aligned}$$

EXEMPLE

On considère A et B deux points fixes du plan $\mathcal{P}$.

Soit f la transformation du plan $\mathcal{P}$ définie par : $f(M) = M'$ telle que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB}$.

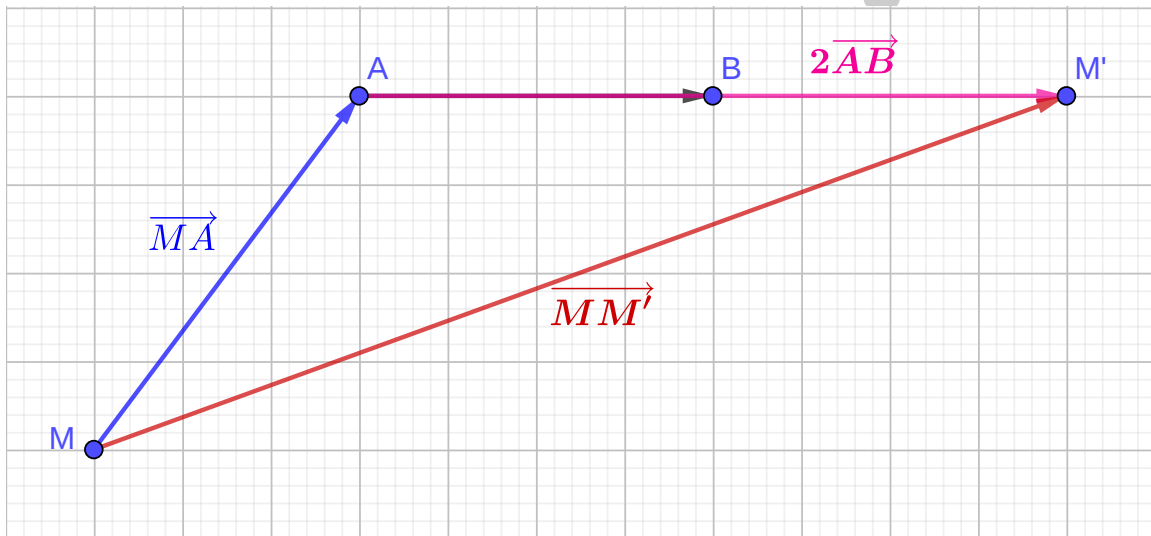


FIGURE 1

REMARQUE

Les transformations du plan qu'on va étudier cette année sont : la symétrie axiale; la symétrie centrale; la translation et l'homothétie.

DEFINITION 2

Soit T une transformation du plan $\mathcal{P}$ et soit A un point du plan.

On dit que Le point A est invariant par la transformation T si, et seulement si $T(A) = A$

II- SYMETRIE AXIALE

DEFINITION

Soit (Δ) une droite du plan $\mathcal{P}$.

La symétrie axiale d'axe (Δ) est la transformation du plan qui transforme tout point M du plan en un point M' tel que la droite (Δ) soit la médiatrice du segment $[MM']$.

La symétrie axiale d'axe (Δ) est notée : $S_{(\Delta)}$.

Autrement dit : $M' = S_{(\Delta)}(M)$ si, et seulement si (Δ) est la médiatrice du segment $[MM']$.

REMARQUE

$M' = S_{(\Delta)}(M)$ si la droite (Δ) passe par le milieu du segment $[MM']$ et $(\Delta) \perp (MM')$.

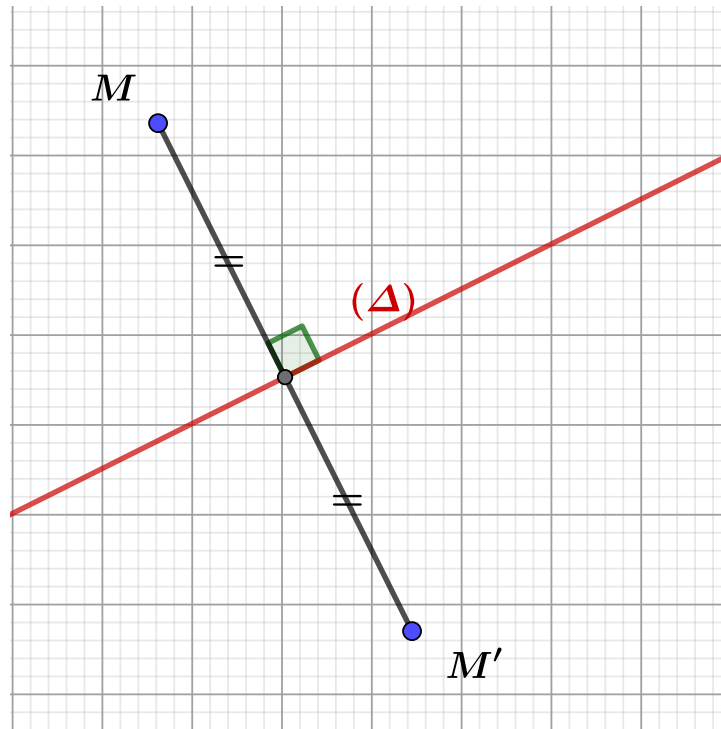


FIGURE 2

PROPOSITION 1 (Propriétés de conservation)

Soit $S_{(\Delta)}$ la symétrie axiale par rapport à la droite (Δ) .

- ▲ Tous les points de la droite (Δ) sont invariants par la symétrie axiale $S_{(\Delta)}$.
- ▲ La symétrie axiale $S_{(\Delta)}$ conserve :
 - **l'alignement des points** : Les symétriques de trois points alignés par une symétrie axiale sont alignés.
 - **la distance entre deux points** : un segment et son image par une symétrie axiale ont la même longueur.
 - **le parallélisme** : les images de deux droites parallèles par une symétrie axiale, sont parallèles.
 - **les mesures des angles** : un angle et son symétrique par une symétrie axiale ont la même mesure.
 - **les périmètres et les aires**.

PROPOSITION 2 (Images de quelques figures par une symétrie axiale)

- ◆ Le symétrique d'une droite (D) par une symétrie axiale $S_{(\Delta)}$ est une droite (D') telles que :
 - $(D) \parallel (D')$ si $(D) \parallel (\Delta)$
 - (D) , (Δ) et (D') se coupent en un point si (D) et (Δ) ne sont pas parallèles.
- ◆ Le symétrique d'un segment $[AB]$ par une symétrie axiale $S_{(\Delta)}$ est un segment $[A'B']$ tels que $A' = S_{(\Delta)}(A)$ et $B' = S_{(\Delta)}(B)$ et $A'B' = AB$.
- ◆ Les symétriques de deux droites parallèles par une symétrie axiale $S_{(\Delta)}$ sont deux droites parallèles entre elles.
- ◆ Les symétriques de deux droites perpendiculaires par une symétrie axiale $S_{(\Delta)}$ sont deux droites perpendiculaires entre elles.
- ◆ Le symétrique d'un cercle $C(O, r)$ par une symétrie axiale $S_{(\Delta)}$ est un cercle $C'(O', r)$ de même rayon tel que $O' = S_{(\Delta)}(O)$.

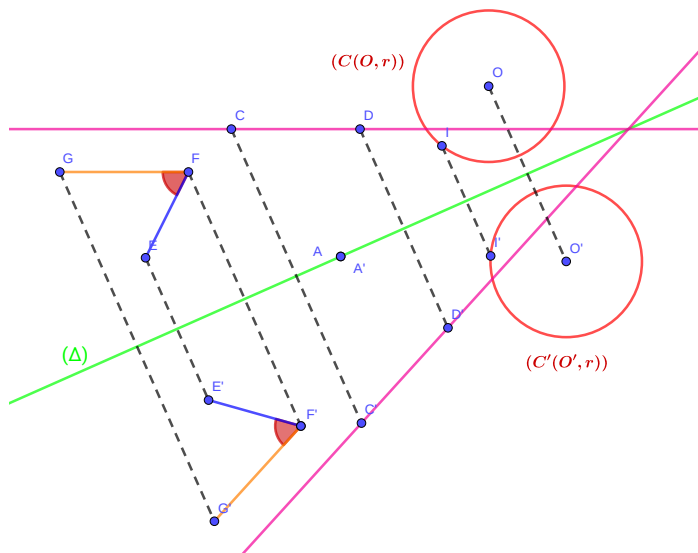


FIGURE 3

Symétrique d'un cercle par une symétrie axiale

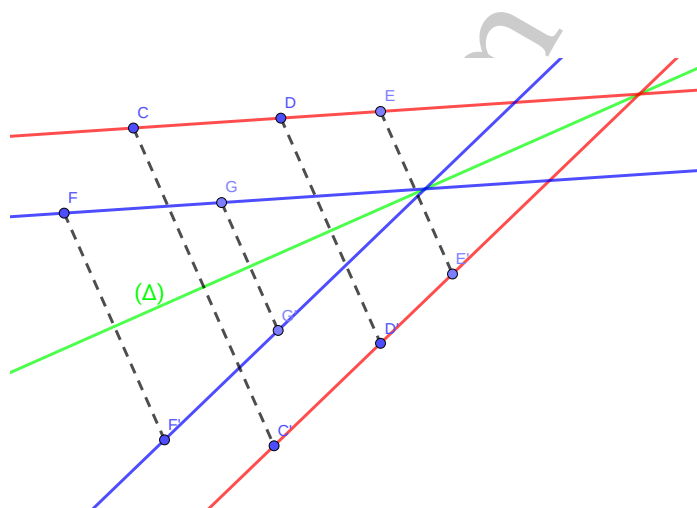


FIGURE 4

III- SYMETRIE CENTRALE

DEFINITION

Soit Ω un point du plan $\mathcal{P}$.

La symétrie centrale de centre Ω est la transformation du plan qui transforme tout point M du plan en un point M' tel que le point Ω soit le milieu du segment $[MM']$.

La symétrie centrale de centre Ω est notée : S_{Ω} .

Autrement dit : $M' = S_{\Omega}(M)$ si, et seulement si Ω est le milieu du segment $[MM']$.

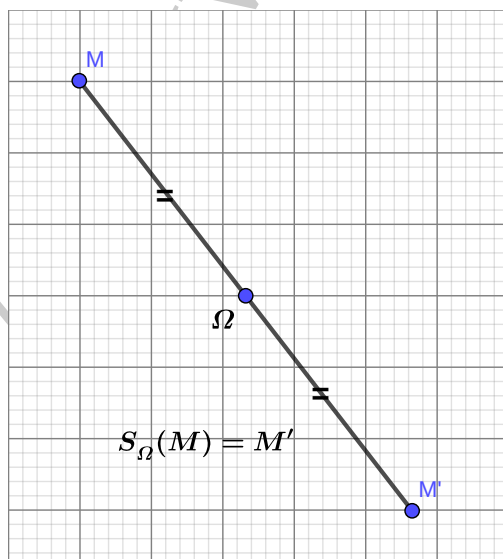


FIGURE 5

PROPRIETES

Soit Ω un point du plan.

★ Ω est l'unique point invariant de la symétrie centrale S_{Ω} .

- ★ $S_{\Omega}(M) = M'$ si et seulement si $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$.
- ★ Si $S_{\Omega}(A) = A'$ et $S_{\Omega}(B) = B'$, alors le quadrilatère $ABA'B'$ est un parallélogramme.

PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DE LA SYMÉTRIE CENTRALE

Une transformation T du plan est une **symétrie centrale de centre Ω** , si et seulement si pour tous les points M et N du plan on a : $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$ avec $T(M) = M'$ et $T(N) = N'$.

PROPOSITION 1 quad (Propriétés de conservation)

Soit S_{Ω} la symétrie centrale de centre le point Ω .

- ▲ Le seul point invariant par la symétrie centrale S_{Ω} est son centre S_{Ω} .
- ▲ La symétrie centrale S_{Ω} conserve :
 - **l'alignement des points** : Les symétriques de trois points alignés par une symétrie centrale sont alignés.
 - **la distance entre deux points** : un segment et son image par une symétrie centrale ont la même longueur.
 - **le parallélisme** : les images de deux droites parallèles par une symétrie centrale, sont parallèles.
 - **les mesures des angles** : un angle et son symétrique par une symétrie centrale ont la même mesure.
 - **les périmètres et les aires**.

PROPOSITION 2 (Images de quelques figures par une symétrie centrale)

- ◆ Le symétrique d'une droite (D) par une symétrie centrale S_{Ω} est une droite (D') telles que $(D) \parallel (D')$.
- ◆ Le symétrique d'un segment $[AB]$ par une symétrie centrale S_{Ω} est un segment $[A'B']$ tels que $A' = S_{\Omega}(A)$ et $B' = S_{\Omega}(B)$ et $A'B' = AB$.
- ◆ Le symétrique d'un cercle $C(O, r)$ par une symétrie centrale S_{Ω} est un cercle $C(O', r)$ de même rayon et tel que $O' = S_{\Omega}(O)$.
- ◆ Les symétriques de deux droites parallèles par une symétrie centrale S_{Ω} sont deux droites parallèles entre elles.
- ◆ Les symétriques de deux droites perpendiculaires par une symétrie centrale S_{Ω} sont deux droites perpendiculaires entre elles.
- ◆ Le symétrique d'un triangle par une symétrie centrale S_{Ω} est un triangle.

IV- TRANSLATION

DEFINITION

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.

La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation du plan qui transforme tout point M du plan en un unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

La translation de vecteur $\vec{u}$ est notée $t_{\vec{u}}$.

Autrement dit : $M' = t_{\vec{u}}(M)$ si, et seulement si $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Remarque

Soient A et B deux points distincts du plan. La translation qui transforme A en B est la translation de vecteur

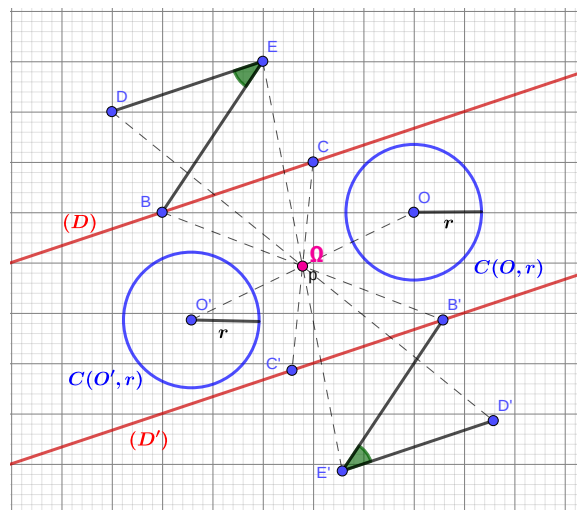


FIGURE 6
Les images de quelques figures par une symétrie centrale

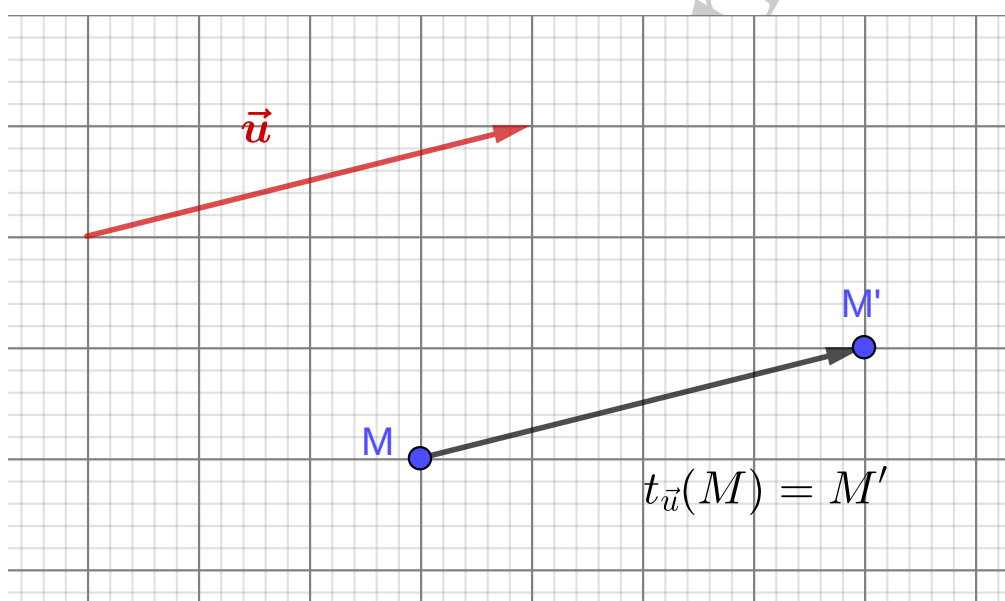


FIGURE 7

$\overrightarrow{AB}$. Et on a : pour tous les points M et M' du plan, $t_{\overrightarrow{AB}}(M) = M'$ si, et seulement si $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.

PROPRIETES

Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur non nul $\vec{u}$.

▲ Aucun point du plan n'est invariant par la translation $t_{\vec{u}}$.

▲ Soient A et B deux points du plan et $A' = t_{\vec{u}}(A)$ et $B' = t_{\vec{u}}(B)$, alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ et le quadrilatère $AA'B'B$ est un parallélogramme.

PROPRIETE CARACTERISTIQUE DE LA TRANSLATION

Une transformation T du plan est une **translation de vecteur** $\vec{u}$, si et seulement si pour tous les points M et N du plan on a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ avec $T(M) = M'$ et $T(N) = N'$.

PROPOSITION

Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur non nul $\vec{u}$. La translation $t_{\vec{u}}$ conserve :

- **l'alignement des points** : Les images de trois points alignés par la translation $t_{\vec{u}}$ sont alignés.
- **la distance entre deux points** : un segment et son image par la translation $t_{\vec{u}}$ ont la même longueur.
- **le parallélisme** : les images de deux droites parallèles par la translation $t_{\vec{u}}$, sont parallèles.
- **les mesures des angles** : un angle et son symétrique par la translation $t_{\vec{u}}$ ont la même mesure.
- **les périmètres et les aires**.

PROPOSITION

- ▲ L'image d'une droite (D) par la translation $t_{\vec{u}}$ est une droite (D') telles que $(D) \parallel (D')$.
- ▲ L'image d'un segment $[AB]$ par la translation $t_{\vec{u}}$ est un segment $[A'B']$ tels que $A' = t_{\vec{u}}(A)$ et $B' = t_{\vec{u}}(B)$ et $A'B' = AB$.
- ▲ L'image d'un angle par la translation $t_{\vec{u}}$ est un angle de même mesure.
- ▲ L'image d'un cercle $C(O, r)$ par la translation $t_{\vec{u}}$ est un cercle $C'(O', r)$ de même rayon tel que $O' = S_{\Omega}(O)$.
- ▲ L'image d'un triangle par la translation $t_{\vec{u}}$ est un triangle.
- ▲ Les images de deux droites parallèles par la translation $t_{\vec{u}}$ sont deux droites parallèles.
- ▲ Les images de deux droites perpendiculaires par la translation $t_{\vec{u}}$ sont deux droites perpendiculaires.

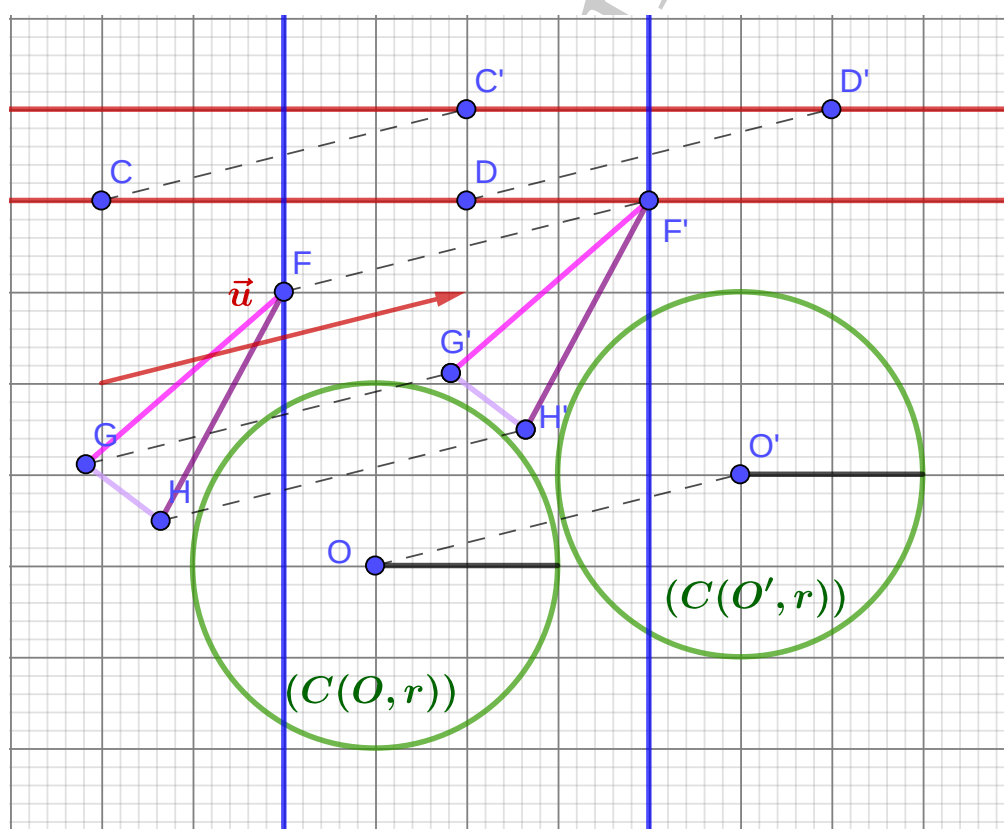


FIGURE 8

Les images de quelques figures par une translation

IV- HOMOTHETIE

DEFINITION

Soit Ω un point du plan et soit k un nombre réel non nul.

L'homothétie de centre Ω et de rapport k est la transformation du plan qui transforme tout point M du plan en un unique point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.
 L'homothétie de centre Ω et de rapport k est notée $h(\Omega, k)$.
 Autrement dit : $M' = h(\Omega, k)(M)$ si, et seulement si $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

Remarques

- Si $k = 1$ alors tous les points du plan sont invariants par l'homothétie $h(\Omega, 1)$.
- Si $k = -1$ alors l'homothétie $h(\Omega, -1)$ est la symétrie centrale de centre Ω .
- $h(\Omega, k)(M) = M'$ si et seulement si $h(\Omega, \frac{1}{k})(M') = M$.
- Si $|k| > 1$ alors l'homothétie $h(\Omega, k)$ est **un agrandissement**.
- Si $|k| < 1, k \neq 0$ alors l'homothétie $h(\Omega, k)$ est **une réduction**.

PROPRIETES

Soit $h(\Omega, k)$ une homothétie dans le plan.

- ⊗ Le seul point invariant de l'homothétie $h(\Omega, k)$ est son centre Ω .
- ⊗ Si $h(\Omega, k)(A) = A'$ et $h(\Omega, k)(B) = B'$ alors le quadrilatère $AA'B'B$ est un trapèze.
- ⊗ L'homothétie $h(\Omega, k)$ ne conserve ni les distances ni les périmètres ni les aires.

PROPRIETE CARACTERISTIQUE DE L'HOMOTHETIE

Une transformation T du plan est une **homothétie de centre Ω et de rapport k** si et seulement si pour tous les points M et N du plan on a : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ avec $T(M) = M'$ et $T(N) = N'$.

PROPOSITION 1 (Propriétés de conservation)

Soit $h(\Omega, k)$ l'homothétie de centre Ω et de rapport k . Alors l'homothétie $h(\Omega, k)$ conserve :

- ▲ **l'alignement des points** : Les images de trois points alignés par l'homothétie $h(\Omega, k)$ sont alignés.
- ▲ **le parallélisme** : les images de deux droites parallèles par l'homothétie $h(\Omega, k)$ sont parallèles.
- ▲ Les images de deux droites perpendiculaires par l'homothétie $h(\Omega, k)$ sont perpendiculaires.
- ▲ **les mesures des angles** : un angle et son image par l'homothétie $h(\Omega, k)$ ont la même mesure.

PROPOSITION 2 (Images de certaines figures par une homothétie)

- ▲ L'image d'une droite (D) par l'homothétie $h(\Omega, k)$ est une droite (D') telles que $(D) \parallel (D')$.
- ▲ L'image d'un segment $[AB]$ par l'homothétie $h(\Omega, k)$ est un segment $[A'B']$ tels que $A' = h(\Omega, k)(A)$ et $B' = h(\Omega, k)(B)$ et $A'B' = |k| \times AB$.
- ▲ L'image d'un cercle $C(O, r)$ par l'homothétie $h(\Omega, k)$ est un cercle $C'(O', r')$ tel que $O' = h(\Omega, k)(O)$ et $r' = |k| \times r$.
- ▲ L'image d'un triangle par l'homothétie $h(\Omega, k)$ est un triangle.
- ▲ Les images de deux droites parallèles par l'homothétie $h(\Omega, k)$ sont deux droites parallèles.
- ▲ Les images de deux droites perpendiculaires par l'homothétie $h(\Omega, k)$ sont deux droites perpendiculaires.

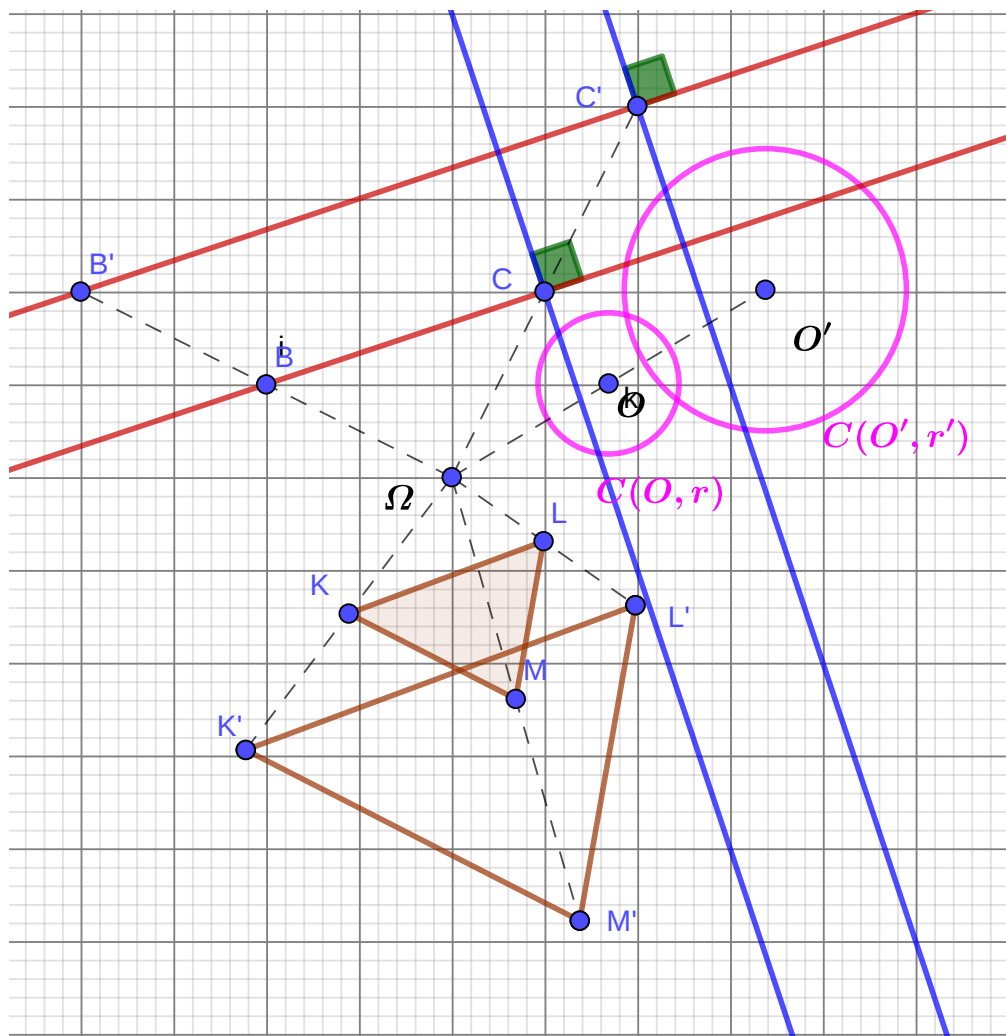


FIGURE 9

Les images de quelques figures par une homothétie de rapport 2