Chap14 : GEOMETRIE DANS L'ESPACE

TABLES DES MATIERES

https://www.dimamath.com

I- AXIOMES DE LA GEOMETRIE DE L'ESPACE

AXIOME 1

Par deux points distincts A et B de l'espace passe une droite et une seule, notée (AB).

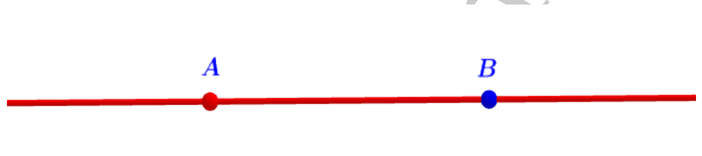


Figure1

AXIOME 2

Par trois points distincts et non alignés A , B et C de l'espace passe un plan et un seul, noté (ABC).

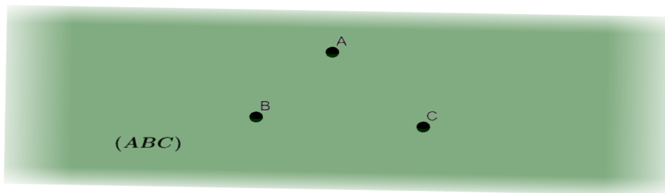


Figure2

AXIOME 3

Si A et B sont deux points de l'espace et (P) est un plan de l'espace qui contient A et B. Alors la droite (AB) est incluse dans le plan (P).
Autrement dit : Si $A \in (P)$ et $B \in (P)$ alors $(AB) \subset (P)$.

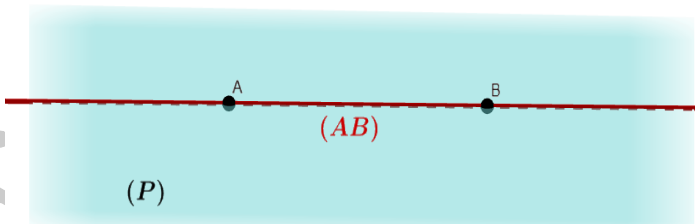


Figure3

AXIOME 4

Soient (P) et (P') deux plans distincts de l'espace.
Si (P) et (P') ont un point commun A, alors les deux plans (P) et (P') se coupent suivant une droite passant par le point A.
Autrement dit : Si $A \in (P)\cap(P')$, alors $(P)\cap(P') = (AB)$ où B est un autre point commun aux deux plans.

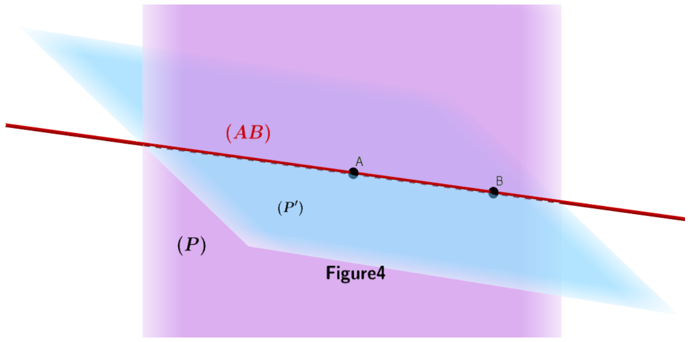


Figure4

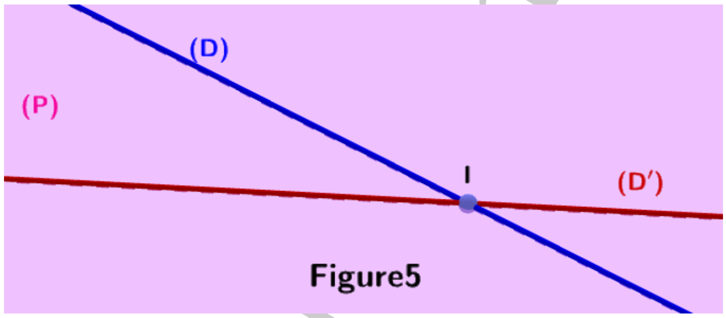
PROPOSITION

※ Toutes les propriétés de la géométrie plane reste valable dans l'espace.
※ Un plan (P) est déterminé par la donnée de :
- Une droite et un point n'appartenant pas à cette droite.
- Trois points non alignés de l'espace .
- Deux droites sécantes non confondues.
- Deux droites strictement parallèles.

II- POSITIONS RELATIVES DE DEUX DROITES DANS L'ESPACE

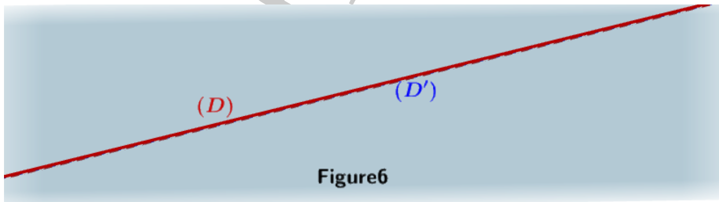
DEFINITION 1

Lorsque deux droites de l'espace se coupent en un seul point I, on dit qu'elles sont **sécantes** et aussi qu'elles sont **coplanaires**



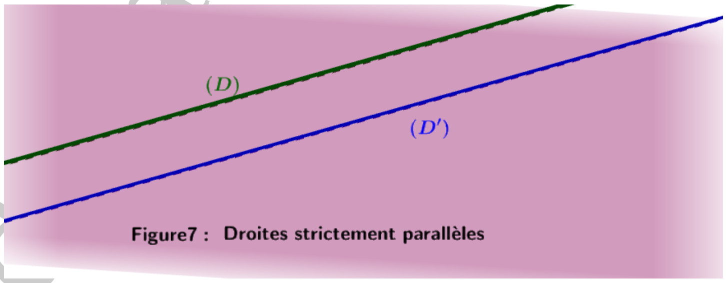
DEFINITION 2

Lorsque deux droites de l'espace se coupent au moins deux points distincts, on dit qu'elles sont **confondues**.



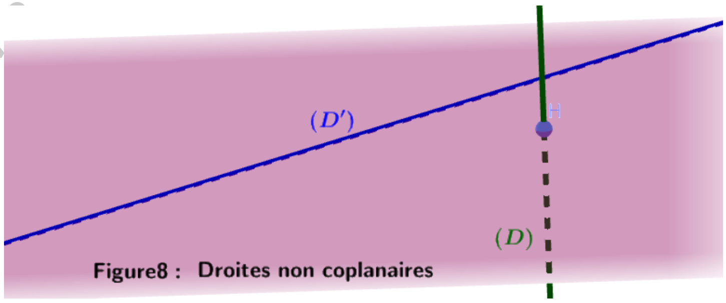
DEFINITION 3

Lorsque deux droites de l'espace n'ont aucun point d'intersection, on dit qu'elles sont **parallèles ou strictement parallèles** et aussi qu'elles sont **coplanaires**



DEFINITION 4

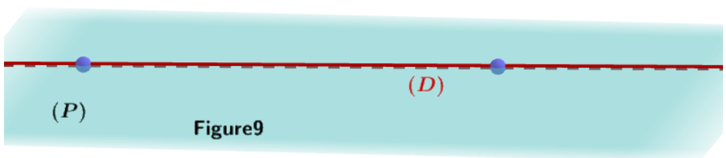
Lorsque deux droites de l'espace ne se sont ni sécantes ni parallèles , on dit qu'elles sont **non coplanaires**.



III- POSITIONS RELATIVES D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

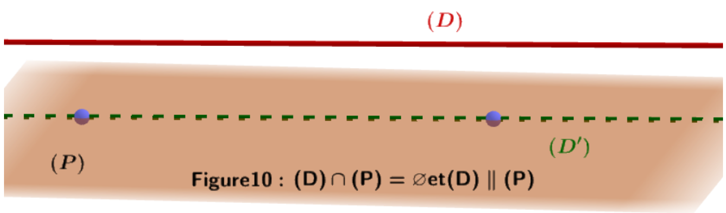
DEFINITION 1

Lorsque une droite (D) coupe un plan (P) au moins en deux points distincts, on dit que la droite (D) est **incluse dans le plan (P)**. On note $(D) \subset (P)$.



DEFINITION 2

Lorsque une droite (D) de l'espace ne coupe un plan (P) en aucun point, on dit qu'elle est **strictement parallèle avec le plan (P)** et on note $(D) \parallel (P)$ et que $(D) \cap (P) = \varnothing$.



DEFINITION 3

Lorsque une droite (D) de l'espace coupe un plan (P) en un seul point I, on dit que **la droite (D) et le plan (P) ont un seul point d'intersection I**. Autrement dit : $(D) \cap (P) = \{I\}$.

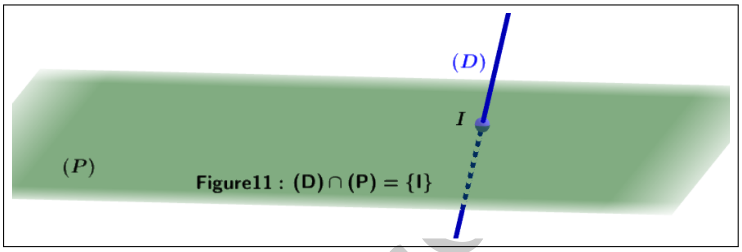


Figure11 : (D) ∩ (P) = {I}

IV- POSITIONS RELATIVES DE DEUX PLANS

DEFINITION 1

Lorsque deux plans (P) et (P') se coupent au moins en trois points distincts, on dit que **les deux plans (P) et (P') sont confondus** et on note $(P) \cap (P') = (P)$.

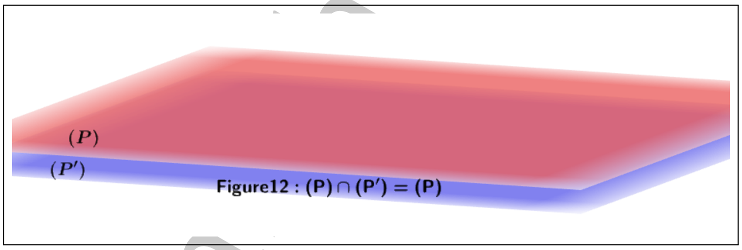


Figure12 : (P) ∩ (P') = (P)

DEFINITION 2

Lorsque deux plans (P) et (P') ne se coupent en aucun point, on dit que **les deux plans (P) et (P') sont strictement parallèles** et on note $(P) \parallel (P')$.

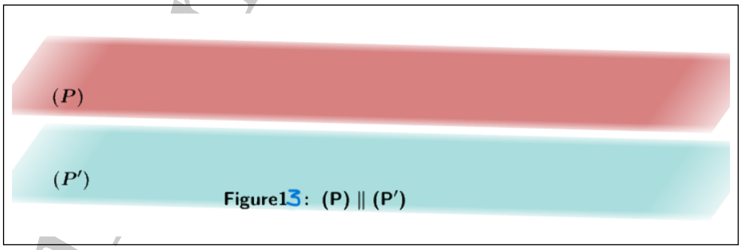


Figure13 : (P) ∥ (P')

DEFINITION 3

Lorsque deux plans (P) et (P') se coupent en un point A et ne sont pas confondus, on dit que **les deux plans (P) et (P') sont sécants et se coupent suivant une droite contenant le point A** et on note $(P) \cap (P') = A$.

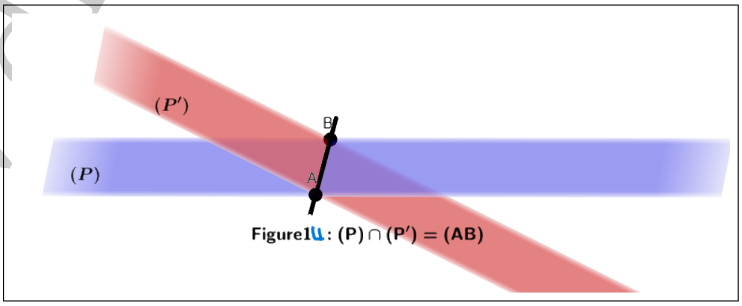


Figure14 : (P) ∩ (P') = (AB)

V- PARALLELISME DANS L'ESPACE

V-1- DROITES PARALLELES

DEFINITION

Deux droites (D) et (D') sont parallèles, et on note $(D) \parallel (D')$, si et seulement si elles sont soit **coplanaires et disjointes** soit **confondues**.
Autrement dit : $(D) \parallel (D'); \Leftrightarrow; (D) = (D')$ ou $\{(D) \cap (D') = \varnothing$ et (D) et (D') coplanaires.

PROPOSITION

▲ Par un point A de l'espace passe une droite et une seule (D) parallèle à une droite donnée (Δ).
▲ Soient (D), (D') et (Δ) trois droites de l'espace.
⋇ Si $(D) \parallel (D')$ et $(D') \parallel (\Delta)$ alors $(D) \parallel (\Delta)$.
⋇ Si $(D) \parallel (\Delta)$ et $(D') \parallel (\Delta)$ alors $(D) \parallel (D')$.

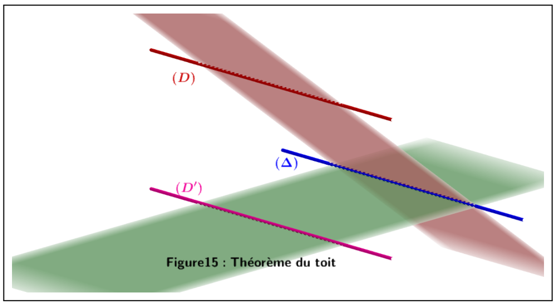


Figure15 : Théorème du toit

REMARQUES

- Deux droites de l'espace sont parallèles si et seulement si elles sont confondues ou strictement parallèles.
- Pour montrer que deux droites (D) et (D') sont parallèles il suffit de montrer qu'elles sont parallèles toutes les deux à une même droite (Δ).

V-2- DROITE ET PLAN PARALLELES

DEFINITION

Une droite (D) et un plan (P) sont dits parallèles si et seulement si :

- la droite (D) est incluse dans le plan (P) : $(D) \subset (P)$
- la droite (D) et la plan (P) n'ont aucun point en commun (sont disjoints) : $(D) \cap (P) = \emptyset$

PROPOSITION

Une droite (D) est parallèle à un plan (P) dans l'espace si et seulement s'il existe une droite (D') incluse dans le plan (P) telle que $(D) \parallel (D')$.

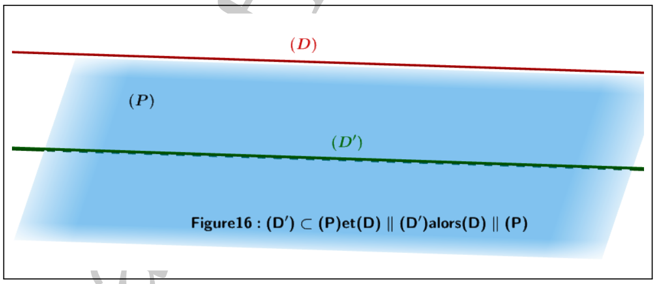


Figure16 : $(D') \subset (P)$ et $(D) \parallel (D')$ alors $(D) \parallel (P)$

V-3- PLANS PARALLELES

DEFINITION

Deux plans (P) et (P') de l'espace sont dits parallèles si et seulement si :

- ils sont confondus : $(P) = (P')$

. ou

- ils n'ont aucun point commun (sont disjoints) : $(P) \cap (P') = \emptyset$

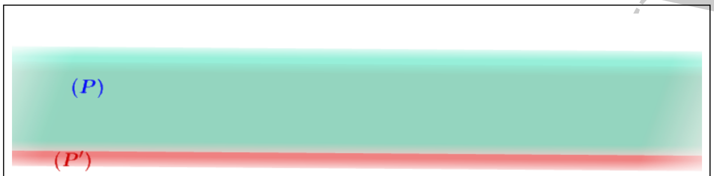


Figure17 : Si (P) et (P') sont confondus alors (P) $\parallel$ (P')

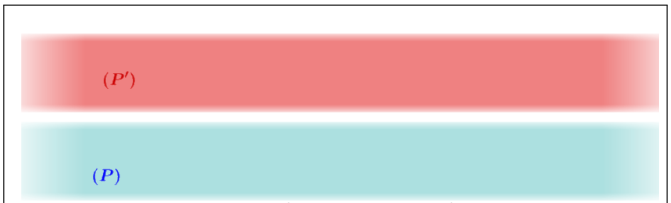


Figure18 : Si $(P) \cap (P') = \emptyset$, alors $(P) \parallel (P')$

PROPOSITION 1

▲ Par un point A de l'espace passe un plan et un seul (P') parallèle à un plan donnée (P).

▲ Si deux plans (P) et (P') sont parallèles, alors tout plan (Q) parallèle à l'un des deux plans est parallèle à l'autre.

Aitrement dit : Si $(P) \parallel (P')$ et $(Q) \parallel (P)$, alors $(Q) \parallel (P')$.

▲ Si un plan (Q) est parallèle à chacun des deux plans (P) et (P'), alors les deux plans (P) et (P') sont parallèles.

Autrement dit : $(Q) \parallel (P)$ et $(Q) \parallel (P')$, alors $(P) \parallel (P')$.

▲ Deux plans (P) et (P') sont parallèles si et seulement si le plan (P) contient deux droites (D) et (D') qui sont parallèles à deux droites (Δ) et (Δ') du plan (P')

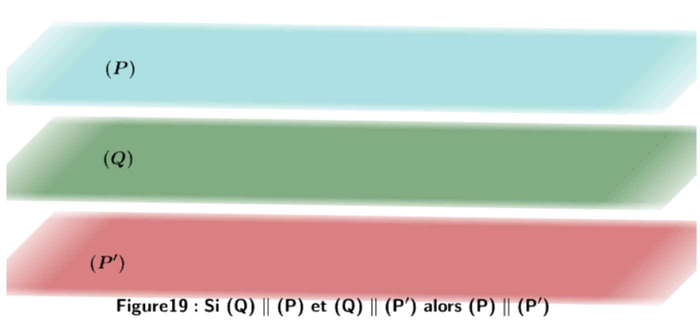


Figure19 : Si (Q) ∥ (P) et (Q) ∥ (P') alors (P) ∥ (P')

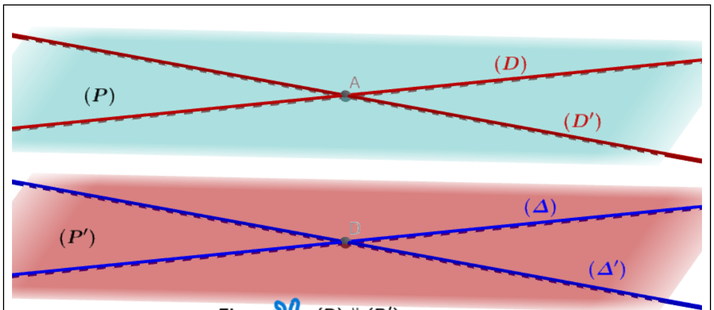


Figure20: (P) ∥ (P')

PROPOSITION 2

▲ Si deux plans (P) et (P') sont parallèles, alors toute droite (D) qui coupe le plan (P) coupe aussi le plan (P').
Autrment dit : Si $(P) \parallel (P')$ et $(D) \cap (P) = \{I\}$ alors $(D) \cap (P') = \{J\}$
▲ Si deux plans (P) et (P') sont parallèles, alors tout plan (Q) de l'espace qui coupe le plan (P) suivant une droite (D) coupe le plan (P') suivant une droite (D') qui est parallèle à (D). Autrement dit : Si $(P) \parallel (P')$ et $(Q) \cap (P) = (D)$ alors $(Q) \cap (P') = (D')$ telle que $(D) \parallel (D')$
▲ Si deux plans (P) et (P') sont sécants suivant une droite (D), alors toute droite (Δ) strictement parallèle aux deux plans (P) et (P') est strictement parallèle à la droite (D).
Autrement dit : Si $(P) \cap (P') = (D)$ et $(\Delta) \parallel (P)$ et $(\Delta) \parallel (P')$ et $(\Delta) \neq (D)$ alors $(\Delta) \parallel (D)$

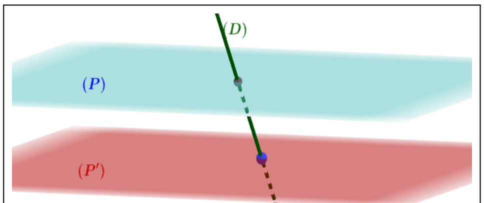


Figure21 : Si (P) ∥ (P') et (D) ∩ (P) = {I}, alors (D) ∩ (P') = {J}

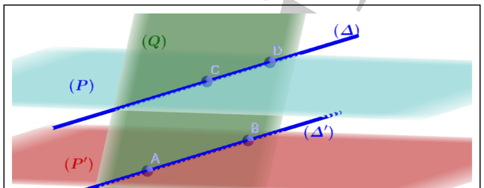


Figure22 : Si (P) ∥ (P') et (Q) ∩ (P) = (Δ), alors (Q) ∩ (P') = (Δ')et(Δ) ∥ (Δ')

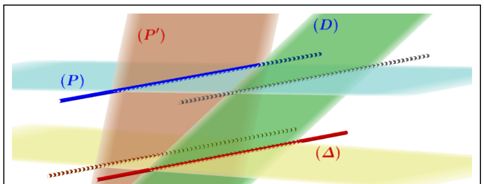


Figure23 : Si (P) ∩ (P') = (D) et (Δ) ∥ (P) et(Δ') ∥ (P'), alors (Δ) ∥ (D)

VI- ORTHOGONALITE DANS L'ESPACE

VI-1- ORTHOGONALITE DE DEUX DROITES

DEFINITION

Deux droite de l'espace (D) et (Δ) sont dites orthogonales si, et seulement si il existe deux droites coplanaires et perpendiculaires (D') et (Δ') telles que $(D) \parallel (D')$ et $(\Delta) \parallel (\Delta')$. On note $(D) \perp (\Delta)$

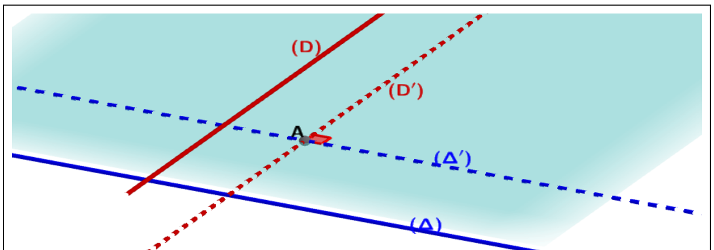


Figure24 : (D) ⊥ (Δ) ⇔ (D') ∩ (Δ') = {A} et (D') ⊥ (Δ')

REMARQUES

- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes.
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales. La réciproque n'est pas vraie car on peut trouver des droites orthogonales non coplanaires ni sécantes.

PROPOSITIONline ▶ Si deux droites (D) et (D') de l'espace sont orthogonales, alors toute droite (Δ) parallèle à (D) est orthogonale à (D').
Autrement dit : Si $(D) \perp (D')$ et $(\Delta) \parallel (D)$, alors $(\Delta) \perp (D')$.

https://www.imamath.

► Si deux droites (Δ) et (Δ') de l'espace sont parallèles, alors toute droite (D) orthogonale à (Δ) est orthogonale à (Δ') .
Autrement dit : Si $(\Delta) \parallel (\Delta')$ et $(D) \perp (\Delta)$ alors $(D) \perp (\Delta')$.

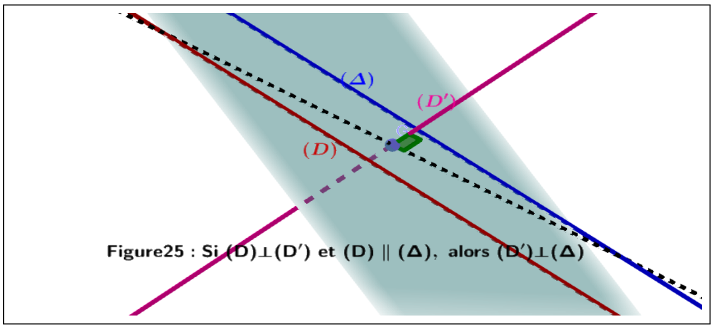


Figure25 : Si $(D) \perp (D')$ et $(D) \parallel (\Delta)$, alors $(D') \perp (\Delta)$

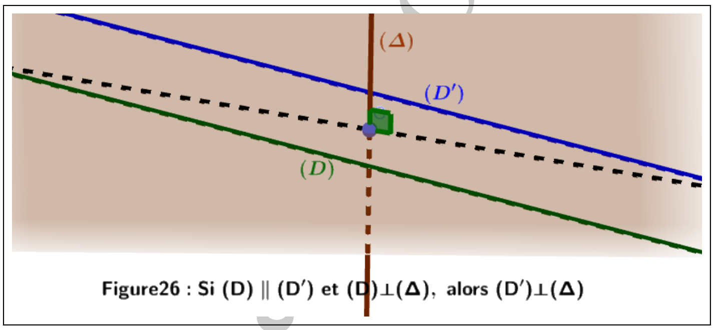


Figure26 : Si $(D) \parallel (D')$ et $(D) \perp (\Delta)$, alors $(D') \perp (\Delta)$

VI-2- ORTHOGONALITE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

DEFINITION

Une droite (D) est orthogonale à un plan (P) dans l'espace si, et seulement si elle est orthogonale à toutes les droites du plan (P). On note $(D) \perp (P)$ et on lit **la droite (D) est orthogonale au plan (P)**.

REMARQUE

- Si une droite (D) est orthogonale à un plan (P) alors la droite (D) coupe le plan (P) en un seul point.
- Par abus de langage, on dit aussi que la droite (D) est perpendiculaire au plan (P).

PROPOSITION

► **Une droite (D) est orthogonale à un plan (P) dans l'espace** si, et seulement si **elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan**
► **Si deux droites (D) et (D') sont parallèles**, alors **tout plan (P) orthogonal à la droite (D) est aussi orthogonal à la droite (D')**.
► **Si deux plans (P) et (P') sont parallèles**, alors **toute droite (D) orthogonal au plan (P) est aussi orthogonal au plan (P')**.

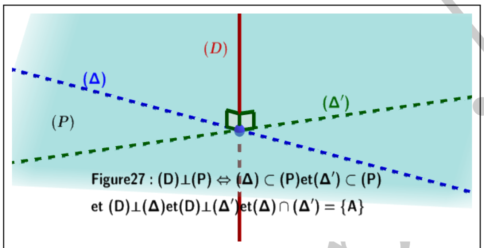


Figure27 : $(D) \perp (P) \Leftrightarrow (\Delta) \subset (P)$ et $(\Delta') \subset (P)$ et $(D) \perp (\Delta)$ et $(D) \perp (\Delta')$ et $(\Delta) \cap (\Delta') = \{A\}$

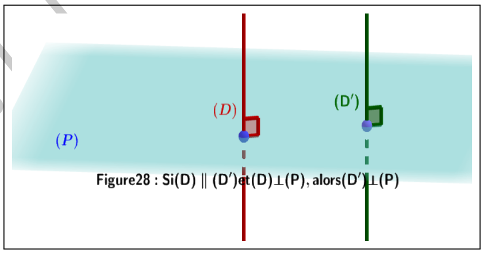


Figure28 : Si $(D) \parallel (D')$ et $(D) \perp (P)$, alors $(D') \perp (P)$

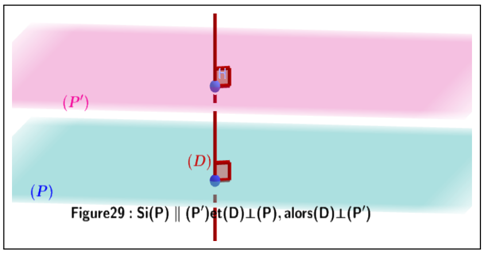


Figure29 : Si $(P) \parallel (P')$ et $(D) \perp (P)$, alors $(D) \perp (P')$

COROLLAIRE

Par un point donné de l'espace :
⋇ passe un plan et un seul orthogonal à une droite donnée.
⋇ passe une droite et une seule orthogonale à un plan donné.

VI-3- ORTHOGONALITE DE DEUX PLANS

DEFINITION

Deux plans (P) et (P') sont dits **orthogonaux dans l'espace si, et seulement si le plan** (P) **est orthogonal à toutes les droites du plan** (P').

PROPOSITION

▶ **Si deux plans** (P) **et** (P') **sont orthogonaux à une même droite** (D) **, alors les plans** (P) **et** (P') **sont parallèles entre eux**

▶ Soient (Q) et (R) **deux plans parallèles de l'espace** :

★ Si un plan (P) est orthogonal à l'un des deux plans (Q) et (R), alors le plan (P) est orthogonal aussi à l'autre plan.

★ Si une droite (D) est orthogonale à l'un des deux plans (Q) et (R), alors la droite (D) est orthogonale aussi à l'autre plan.

▶ **Si deux plans** (P) **et** (P') **sont sécants en une droite** (D)**, alors tout plan** (Q) **orthogonal aux deux plans** (P) **et** (P') **est orthogonal à la droite** (D).

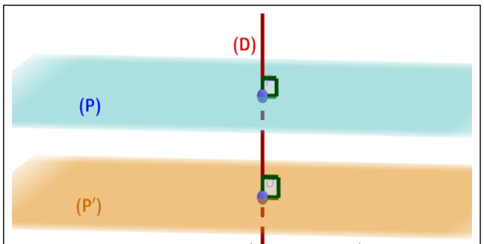
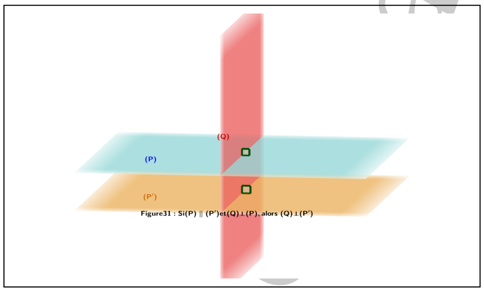


Figure30 : Si(D)⊥(P)et(D)⊥(P′) alors (P) ∥ (P′)



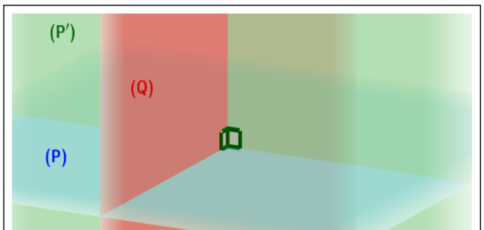


Figure32 : Si(P)∩(P′) = (D)et(Q)⊥(P)et (Q)⊥(P′), alors(D)⊥(Q)

VII- SURFACES ET VOLUMES DES SOLIDES USUELLES

VII-1- LES SOLIDES DROITS

Surfaces et volume d'un cube

Soit $ABCDEFGH$ un cube tel que a est la longueur de son arête , alors :

Sa surface latérale est : $S_L = 4a^2$
Sa surface totale est : $S_T = 6a^2$
Son volume est : $V = a^3$

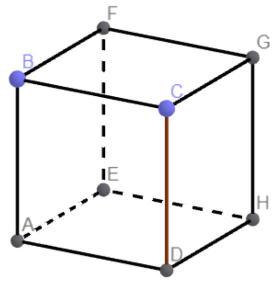


Figure33 : Cube

Surfaces et volume d'unparallélépipède rectangle

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle tel que $AB = L, AD = l$ et $AE = h$, alors :

Sa surface latérale est : $S_L = 2(L + l) \times h$
Sa surface totale est : $S_T = S_L + 2L \times l$
Son volume est : $V = L \times l \times h$

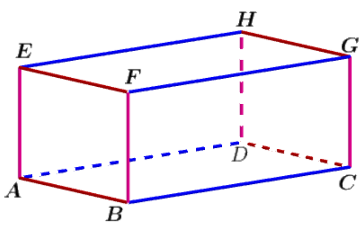


Figure34 : Parallélépipède droit

Surfaces et volume d'un cylindre droit

On considère un cylindre droit dont les deux bases sont des cercles de rayon R et de hauteur h, alors :

Sa surface latérale est : $S_L = 2\pi \times R \times h$

Sa surface totale est : $S_T = S_L + 2\pi \times R^2$

Son volume est : $V = \pi \times R^2 \times h$

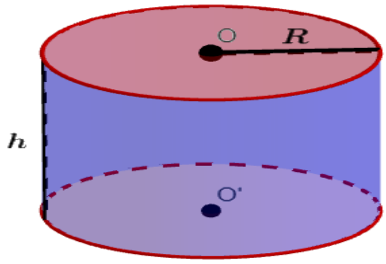


Figure35 : Cylindre droit

Surfaces et volume d'un prisme droit

On considère un prisme droit de hauteur h dont les deux bases sont des polygones de même nature et de même périmètre P_B et de même surface S_B alors :

Sa surface latérale est : $S_L = P_B \times h$

Son volume est : $V = P_B \times h$

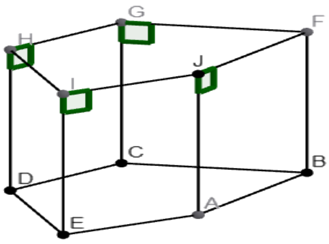


Figure36 : Prisme droit

VII-2- PYRAMIDE ET CÔNE

Volume d'une pyramide

On considère une pyramide de sommet S et de hauteur h et de base un polygone dont la surface est S_B alors :

Son volume est : $V = \frac{1}{3} S_B \times h$

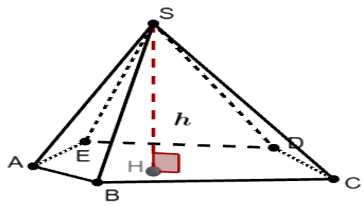


Figure37 : Pyramide

Volume d'un cône de révolution

On considère un cône de révolution de sommet S et de hauteur h et de base un cercle de centre O et de rayon R, alors :

Son volume est : $V = \frac{1}{3}\pi \times R^2 \times h$

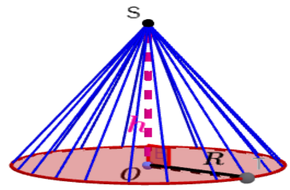


Figure38 : Cône de révolution

VII-3- SPHERE ET BOULE

Volume d'une sphère

On considère une sphère de centre O et de rayon R alors :

Son volume est : $V = \frac{4}{3}\pi \times R^3$

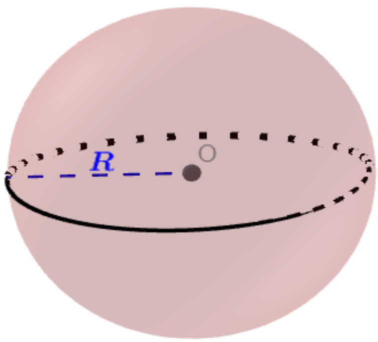


Figure39 : Sphère