Chapitre 9 : LE CALCUL TRIGONOMÉTRIQUE

TABLES DES MATIÈRES

I- CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE - LE RADIAN

I-1- CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

Définition

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre le point O et de rayon r.
On dit que $\mathcal{C}$ est un **cercle trigonométrique** si, et seulement si :
- ∗ son rayon **r = 1**
- ∗ il est **muni d'une origine I**
- ∗ il est **orienté positivement** (dans le sens contraire du mouvement des aiguilles d'une montre)

En plus si tous les cercles du plan sont orientés positivement, on dit que **le plan est direct** ou qu'il est orienté positivement.

I-2- LE RADIAN

Définition

Le radian, noté **rad**, est une unité de mesure des angles du système international, il est défini comme l'unité de mesure de l'angle au centre d'un cercle qui intercepte un arc de cercle de longueur égale au rayon de ce cercle.

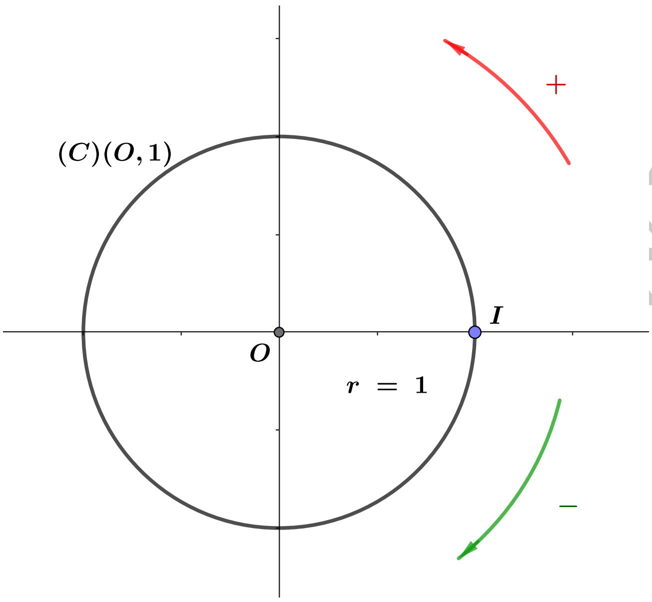


FIGURE 1 – Cercle trigonométrique

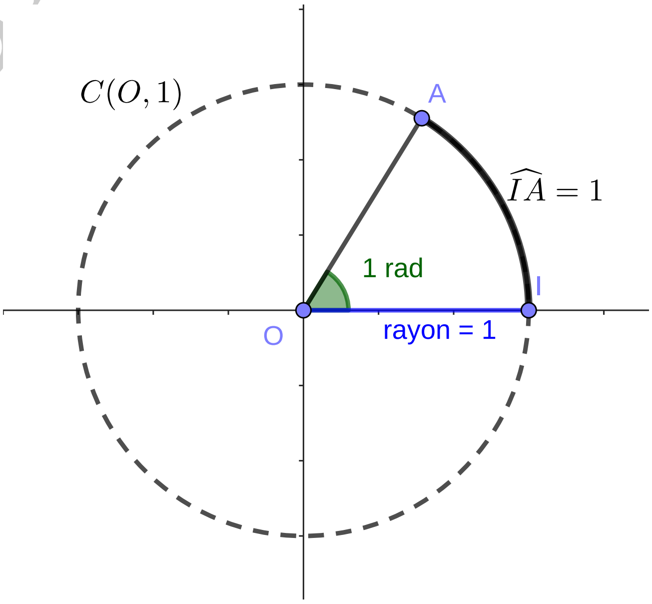


FIGURE 2 – le radian

REMARQUE

Dans un cercle $C(O,r)$ si M est un point de ce cercle et la mesure de l'arc de cercle centré en O est inférieure à 2π, alors une mesure en radian de l'angle $\widehat{IOA}$ est égale à r rad.

I-3- RELATION : RADIAN - DEGRÉ - GRADE

Proposition : Correspondance degré - radian - grade

- ⋆ Chaque angle géométrique peut être mesuré en **degré :** °, en **radian : rad** ou en **grade : gr**.
- ⋆ Si α, β et γ sont les mesures respectives d'un angle en degré, en radian et en grade, alors

α, β et γ sont proportionnelles respectivement à 180, π et 200.

$$\frac{\alpha}{180} = \frac{\beta}{\pi} = \frac{\gamma}{200}$$

ANGLES REMARQUABLES

Angle en degré	0	30	45	60	90	180	360
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

II- ANGLES ORIENTES

II-1- ENROULEMENT D'UNE DROITE AUTOUR DU CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

Dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère le cercle trigonométrique $C(O,1)$ et une droite (IT) tangente au cercle $C(O,1)$ en I et orientée telle que le vecteur $\vec{j}$ soit un vecteur directeur de (IT) .
Si on enroule la droite (IT) autour du cercle $C(O,1)$ on associe à tout point N d'abscisse x de la droite (IT) un unique point M du cercle $C(O,1)$.
Ainsi la longueur de l'arc de cercle $\widehat{IM}$ est égale à la longueur x du segment $[IN]$.

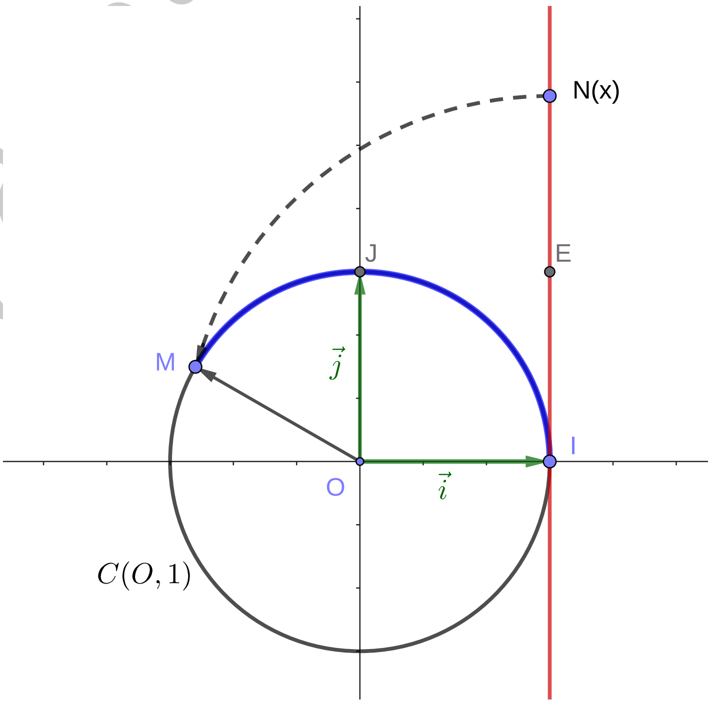


Figure 3 - enroulement d'une droite autour du cercle trigonométrique

II-2- ABSCISSE CURVILIGNE D'UN POINT SUR LE CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

Théorème et définition

Soit $C(O,1)$ un cercle trigonométrique.
★ $Achaquenombrerel$ α correspond un unique point M du cercle $C(O,1)$.
★ $Lenombrerel$ α s'appelle **une abscisse curviligne** du point M et on écrit $M(\alpha)$.
★ Si α est une abscisse curviligne d'un point M, alors tout nombre réel qui s'écrit sous la forme $\alpha + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$, est aussi une abscisse curviligne du point M.
★ $Parmitouteslesabscissescurvilignesd'unpointM,ilexisteuneseulequiappartientl'intervalle$

]$-\pi;\pi$], on l'appelle **l'abscisse curviligne principale de M**

REMARQUE

Pour représenter des points du plan dont on connait les abscisses curvilignes, il faut d'abord déterminer leurs abscisses curvilignes principales.

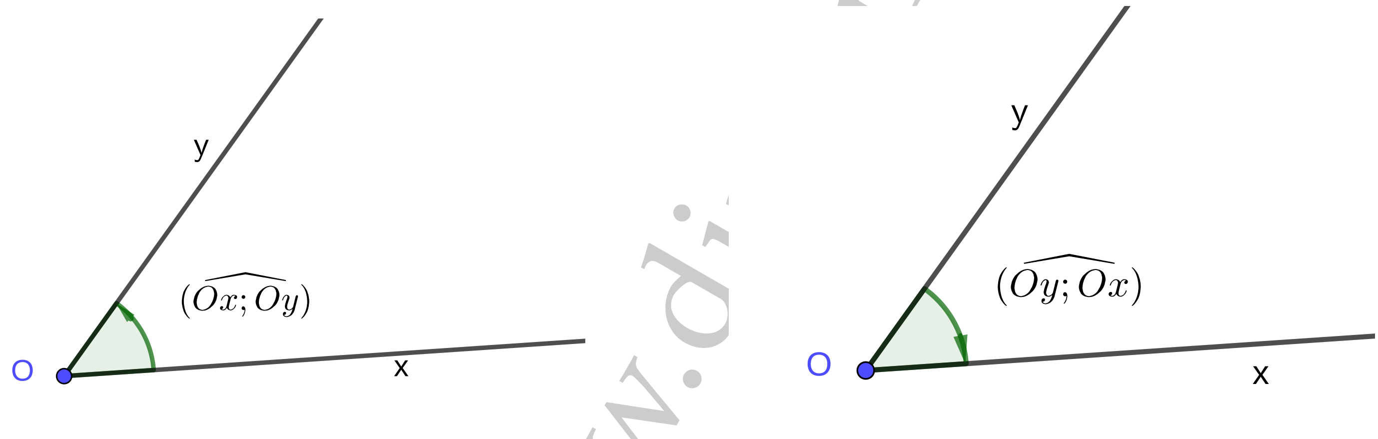
II-3- ANGLE ORIENTE DE DEUX DEMI-DROITES AYANT MÊME ORIGINE.

Définition 1

On considère deux demi-droites ayant même origine O, $[Ox)$ et $[Oy)$.

♣ Le couple $([Ox);[Oy))$ détermine un **angle orienté de deux demi-droites**, noté $\widehat{([Ox);[0y))}$

♣ Le couple $([Oy);[Ox))$ détermine un **angle orienté de deux demi-droites**, noté $\widehat{([Oy);[0x))}$.



(a) Angle orienté $(\widehat{Ox;0y})$

(b) Angle orienté $(\widehat{Oy;0x})$

FIGURE 3

Définition 2

Soit $C(O,1)$ un cercle trigonométrique de centre O et d'origine le point I, et soit $\widehat{([Ox);[0y))}$ un angle orienté de deux demi-droites de même origine O.
Les deux droites $[Ox)$ et $[Oy)$ coupent le cercle $C(O,1)$ respectivement en deux points I et M;
Soit α une abscisse curviligne du point M sur $C(O,1)$.

♣ Le nombre réel α est appelé **mesure de l'angle orienté** $\widehat{([Ox);[0y))}$.

♣ Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ le nombre réel $\alpha + k(2\pi)$ b est aussi une mesure de l'angle orienté $\widehat{([Ox);[0y))}$.

♣ On a : $\overline{(Ox;Oy)} = \alpha + k(2\pi) \,/\, k \in \mathbb{Z}$.

Proposition

On considère trois demi-droites ayant une même origine O, $[Ox)$, $[0y)$ et $[0z)$. Alors :

* $\overline{(Ox;Ox)} = 2k\pi; (k \in \mathbb{Z})$.
* $\overline{(Oy;Ox)} = -\overline{(Ox;Oy)} + k(2\pi)$

* $\overline{(Ox;Oy)} + \overline{(Oy;Oz)} = \overline{(Ox;Oz)} + k(2\pi)$. Cette relation s'appelle **relation de Chasles**

REMARQUE

Parmi les mesures d'un angle orienté de deux demi-droites ayant une même origine, il existe une unique mesure qui aappartient à l'intervalle $]-\pi,\pi]$, **appelée mesure principale de cet angle orienté**

II-4- ANGLE ORIENTE DE DEUX VECTEURS

Définition

Soient O un point du plan et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
On considère les demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ dirigées respectivement par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

♠ L'angle orienté des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ '; dans cet ordre est l'angle orienté $(\widehat{Ox;Oy})$ on le note $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

♠ On a alors : $\overline{(\vec{u};\vec{v})} = \overline{(Ox;Oy)}$

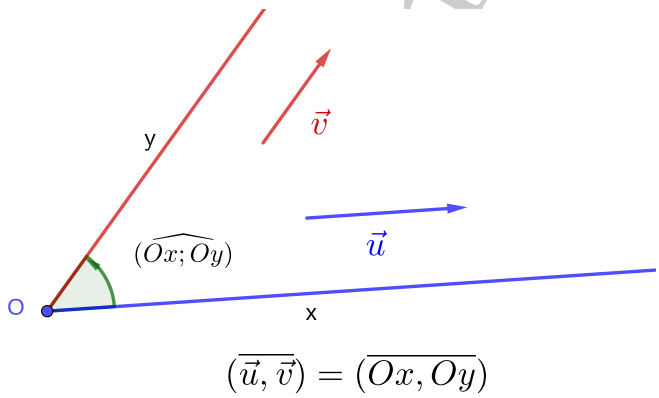


Figure 4 – Angle orienté de deux vecteurs

Proposition

Pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls, on a :

- $\overline{(\vec{u};\vec{u})} = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- $\overline{(\vec{u};-\vec{u})} = \pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- $\overline{(\vec{v};\vec{u})} = -\overline{(\vec{u};\vec{v})} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- $\overline{(-\vec{u};-\vec{v})} = \overline{(\vec{u};\vec{v})} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- $\overline{(-\vec{u};\vec{v})} = \overline{(\vec{u};\vec{v})} + \pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- $\overline{(\vec{u};\vec{v})} + \overline{(\vec{v};\vec{w})} = \overline{(\vec{u};\vec{w})} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ (**Relation de Chasles**)

III- LES RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES D'UN NOMBRE RÉEL

III- 1- COSINUS - SINUS - TANGENTE D'UN NOMBRE RÉEL

Définition

Soit (C) un cercle trigonométrique de centre O et d'origine I, et soit J le point de (C) tel que $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit (T) la tangente à (C) au point I .
Soit M un point de (C) d'abscisse curviligne le nombre réel x.

♦ L'abscisse x_M du point M dans le repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ est appelé **cosinus du nombre réel** x et est noté $\mathbf{cos(x) = x_M}$.

♦ L'ordonnée y_M du point M dans le repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ est appelé **sinus du nombre réel** x et est noté $\mathbf{sin(x) = y_M}$.

♦ Si en plus $M \neq J$ et $M \neq J'$ et P est le point d'intersection de la tangente (T) avec la droite (OM). On appelle **tangente du nombre réel** x la distance algébrique entre I et P et on note $\mathbf{tan(x)} = \overline{\mathbf{IP}}$

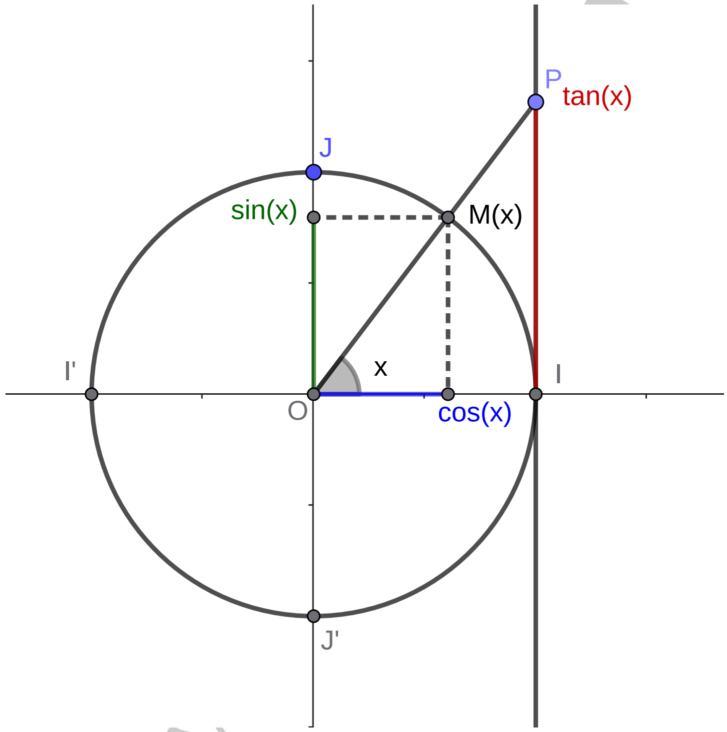


FIGURE 5 – Cosinus - Sinus - Tangente d'un réel x

Proposition

Pour tout réel x on a :

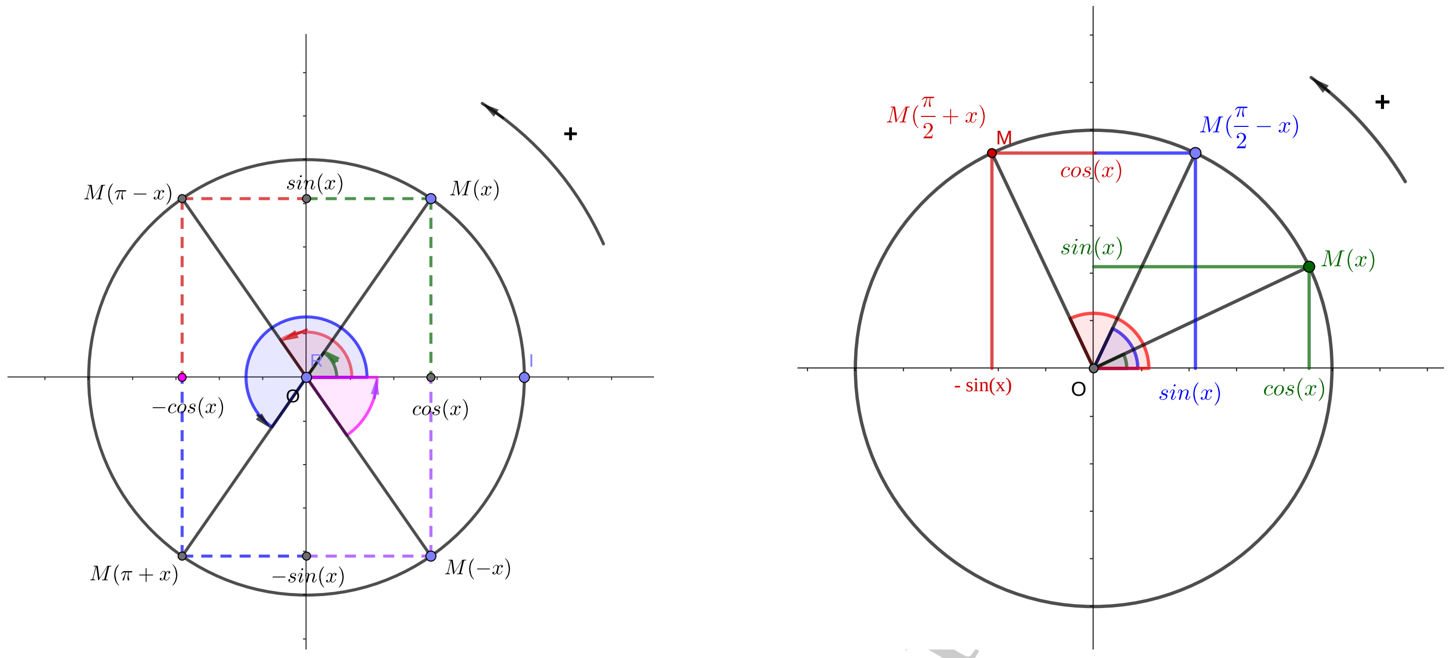
- ⊛ $-1 \leqslant cos(x) \leqslant 1$.
- ⊛ $cos^2(x) + sin^2(x) = 1$.
- ⊛ $sin(x + 2k\pi) = sin(x)$.
- ⊛ $-1 \leqslant sin(x) \leqslant 1$.
- ⊛ $cos(x + 2k\pi) = cos(x)$.
- ⊛ $tan(x + k\pi) = tan(x)$.

En plus si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$ on a :

- ⊛ $tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$.
- ⊛ $1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$

III- 2- RELATIONS ENTRE LES RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES

III-3- RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES DES ANGLES USUELS



(a) Rapport trigonométrique de $\pi - x$ et $\pi + x$

(b) Rapport trigonométrique de $\frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} + x$

FIGURE 6

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
tan(x)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\otimes$	0

III-4- Signe des rapports trigonométriques sur $]-\pi, \pi]$

Proposition 1

Soit (C) un cercle trigonométrique de centre O et d'origine I et soit M un point de (C) d'abscisse curviligne x. Alors :

★ $\cos(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{2}$

★ $\cos(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

★ $\cos(x) \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi]$

Proposition 2

Soit (C) un cercle trigonométrique de centre O et d'origine I et soit M un point de (C) d'abscisse curviligne x. Alors :

★ $\sin(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ou $x = \pi$

★ $\sin(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [0, \pi]$.

★ $\sin(x) \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\pi, 0]$

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{\pi}{2}$		π
$cos(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Figure 7 – Tableau de signe de cos(x)

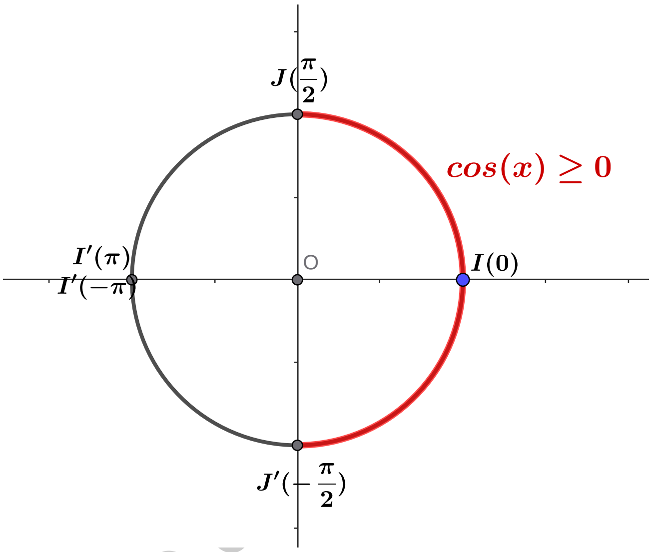


Figure 8 – lecture graphique du Signe de cos(x)

x	$-\pi$		0		π
$sin(x)$	0	$-$	0	$+$	0

Figure 9 – Tableau de signe de sin(x)

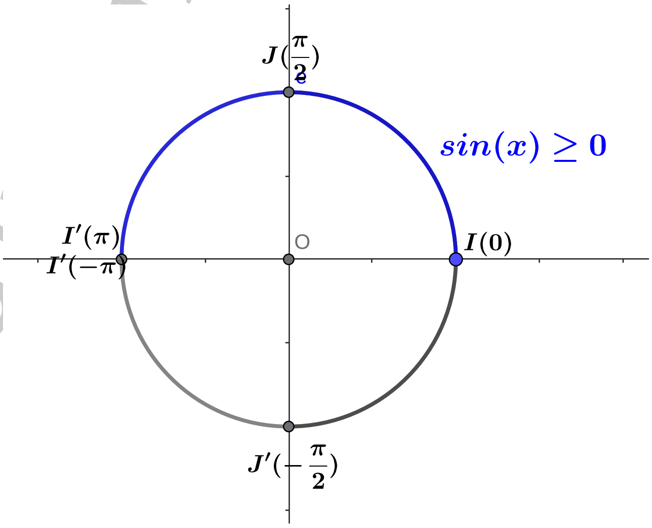


Figure 10 – lecture graphique du Signe de sin(x)

Proposition 3

Soit (C) un cercle trigonométrique de centre O et d'origine I et soit M un point de (C) d'abscisse curviligne $x/x \neq -\frac{\pi}{2}$ et $x \neq \frac{\pi}{2}$. et soit (T) la tangente à (C) à son origine I. Alors :

- ★ $\tan(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = -\pi$
- ★ $\tan(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup [0, \frac{\pi}{2}[$.
- ★ $\tan(x) \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, 0] \cup]\frac{\pi}{2}, \pi]$

IV- REPRÉSENTATION DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

IV-1- ETUDE DE LA FONCTION SINUS

Définition

- $*$ La fonction : $x \longmapsto sin(x)$ est appelée **la fonction sinus**. Elle est définie sue $\mathbb{R}$.
- $*$ Puisque, pour tout réel x on a ; $sin(x + 2k\pi) = sin(x)$, on dit que

la fonction sinus est périodique de période 2π.

- $*$ Puisque, pour tout réel x on a ; $sin(-x) = -sin(x)$, on dit que

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$tan(x)$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	0

Figure 11 – Tableau de signe de cos(x)

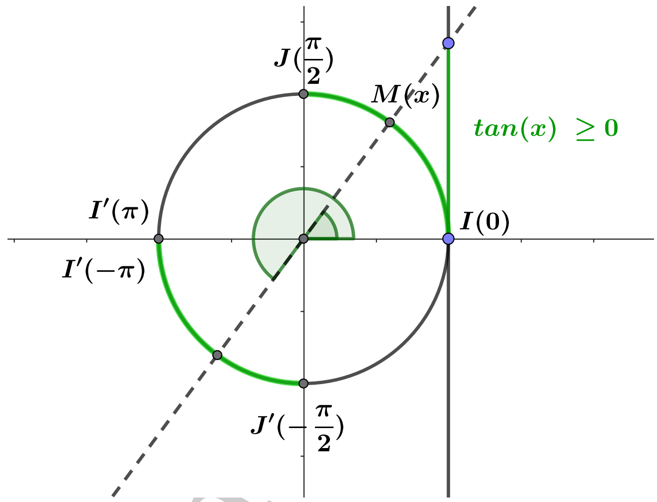


Figure 12 – lecture graphique du Signe de cos(x)

la fonction sinus est impaire.
$*$ Puisque la fonction sinus est 2π - périodique et impaire, on peut étudier la fonction sinus seulement sur l'intervalle $[0,\pi]$

Proposition

- Pour tout $(x,y) \in [0,\frac{\pi}{2}] \times [0,\frac{\pi}{2}]$ tel que $x \leqslant y$, on a : $sin(x) \leqslant sin(y)$. On dit que **la fonction sinus est croissante sur l'intervalle** $[0,\frac{\pi}{2}]$
- Pour tout $(x,y) \in [\frac{\pi}{2},\pi] \times [\frac{\pi}{2},\pi]$ tel que $x \leqslant y$, on a : $sin(x) \geqslant sin(y)$. On dit que **la fonction sinus est décroissante sur l'intervalle** $[\frac{\pi}{2},\pi]$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$sin(x)$	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

Figure 13 – Tableau de variation de la fonction sinus

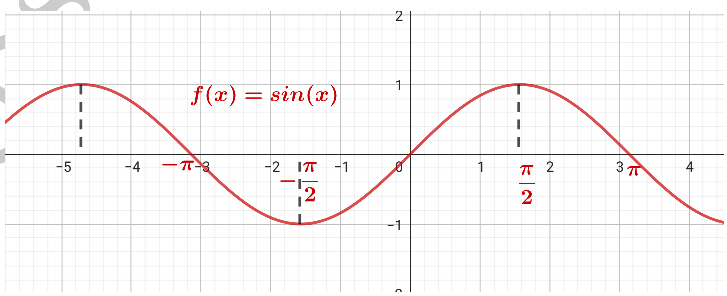


Figure 14 – Représentation graphique de la fonction sinus

IV-2- ETUDE DE LA FONCTION COSINUS

Définition

* La fonction : $x \longmapsto cos(x)$ est appelée **la fonction cosinus**. Elle est définie sue $\mathbb{R}$.
* Puisque, pour tout réel x on a ; $cos(x+2k\pi) = cos(x)$, on dit que **la fonction cosinus est périodique de période** 2π.
* Puisque, pour tout réel x on a ; $cos(-x) = cos(x)$, on dit que **la fonction cosinus est paire**.
* Puisque la fonction cosinus est 2π - périodique et paire, on peut étudier la fonction cosinus seulement sur l'intervalle $[0, \pi]$

Proposition

Pour tout $(x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$ tel que $x \leqslant y$, on a : $cos(x) \geqslant cos(y)$. On dit que **la fonction cosinus est décroissante sur l'intervalle** $[0, \pi]$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$cos(x)$	-1 ↗	0 ↗	1	↘ 0	↘ -1

FIGURE 15 – Tableau de variation de la fonction cosinus

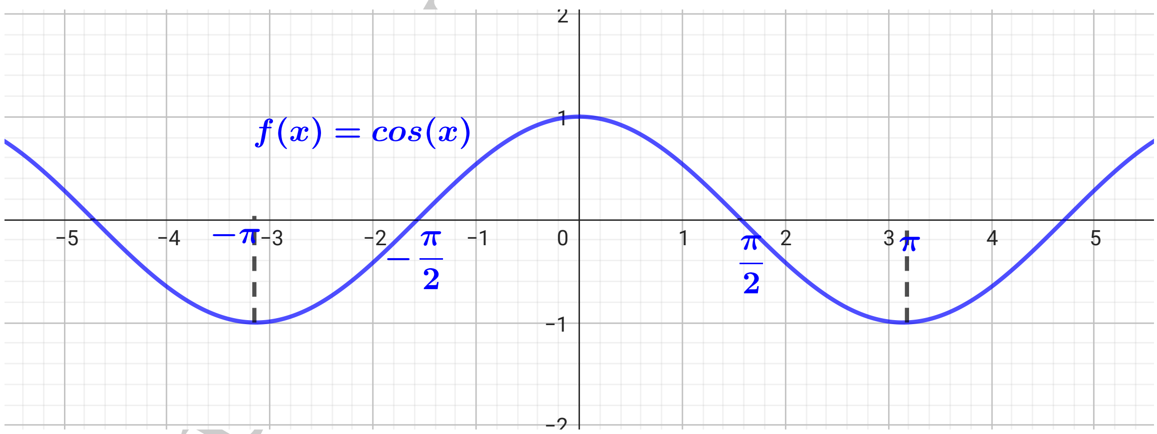


FIGURE 16 – Représentation graphique de la fonction cosinus

IV-3- ETUDE DE LA FONCTION TANGENTE

Définition

* La fonction : $x \longmapsto tan(x)$ est appelée **la fonction tangente**. Elle est définie sur $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
* Puisque, pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$ on a ; $tan(x+k\pi) = tan(x)$, on dit que

la fonction tangente est périodique de période π.

$*$ Puisque, pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$ on a ; $tan(-x) = -tan(x)$, on dit que **la fonction tangente est impaire**.

$*$ Puisque la fonction tangente est π - périodique et impaire, on peut étudier la fonction tangente seulement sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$

Proposition

- Pour tout $(x,y) \in [0, \frac{\pi}{2}[\times[0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $x \leqslant y$, on a : $tan(x) \leqslant tan(y)$. On dit que **la fonction tangente est croissante sur l'intervalle** $[0, \frac{\pi}{2}[$
- Pour tout $(x,y) \in]-\frac{\pi}{2}, 0]\times]-\frac{\pi}{2}, 0]$ tel que $x \leqslant y$, on a : $tan(x) \leqslant tan(y)$. On dit que **la fonction tangente est croissante sur l'intervalle** $]-\frac{\pi}{2}, 0]$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$tan(x)$	↗	0	↗

FIGURE 17 – Tableau de variation de la fonction tangente

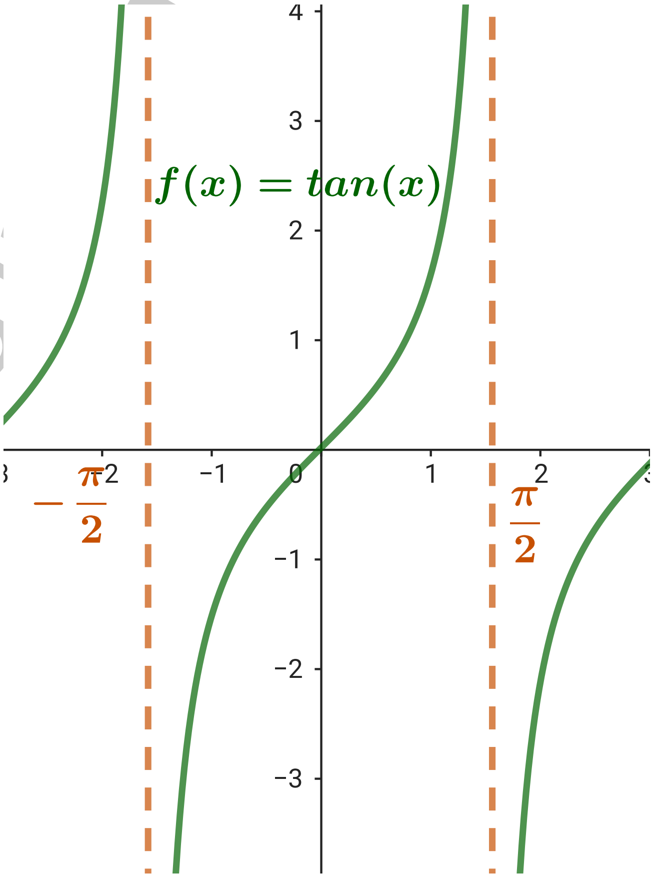


FIGURE 18 – Représentation graphique de la fonction tangente

V- ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

V-1- ÉQUATION : cos(x) = a - INÉQUATIONS : $cos(x) \geqslant a$; $cos(x) \leqslant a$

Proposition

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Si $|a| > 1$, alors l'équation $cos(x) = a$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$ donc $S = \varnothing$.
- Si $|a| \leqslant 1$, alors il existe un réel α tel que : $cos(\alpha) = a$. Par conséquent l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $cos(x) = a$ est : $S = \{\alpha + 2k\pi, -\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

REMARQUE

- ▲ L'ensemble des solutions de l'équation $cos(x) = 1$ est $S = \{2k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$
- ▲ L'ensemble des solutions de l'équation $cos(x) = -1$ est $S = \{\pi + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$
- ▲ L'ensemble des solutions de l'équation $cos(x) = 0$ est $S = \{\frac{\pi}{2} + k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$

EXEMPLE 1

Résoudre dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ ' ; l'inéquation : $cos(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

• *Onsaitque* $\cos(\pi\overline{\quad}_{3)=cos(-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}}$

• *Surlecercletrigonomtriqueonplacelespointsd'abscissecurvilignesrespectives* -$\pi_{\overline{3}}$ et $\frac{\pi}{3}$.

• *L'arcbleusurlecercletrigonomtriquequicorrespond* cos(x) $\leqslant \frac{1}{2}$ montre que $S = [-\pi, -\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{3}, \pi]$.

EXEMPLE 2

Résoudre dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ l'inéquation : $cos(x) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

• *Onsaitque* $\cos(\pi\overline{\quad}_{4)=cos(-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}}$

• *Surlecercletrigonomtriqueonplacelespointsd'abscissecurvilignesrespectives* -$\pi_{\overline{4}}$ et $\frac{\pi}{4}$.

• *L'arcrougesurlecercletrigonomtriquequicorrespond* cos(x) $\geqslant \frac{1}{2}$ montre que $S = [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$.

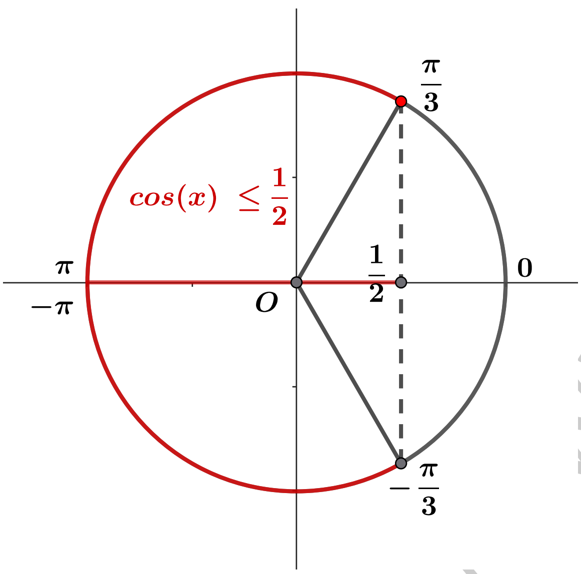


FIGURE 19 – Exemple 1

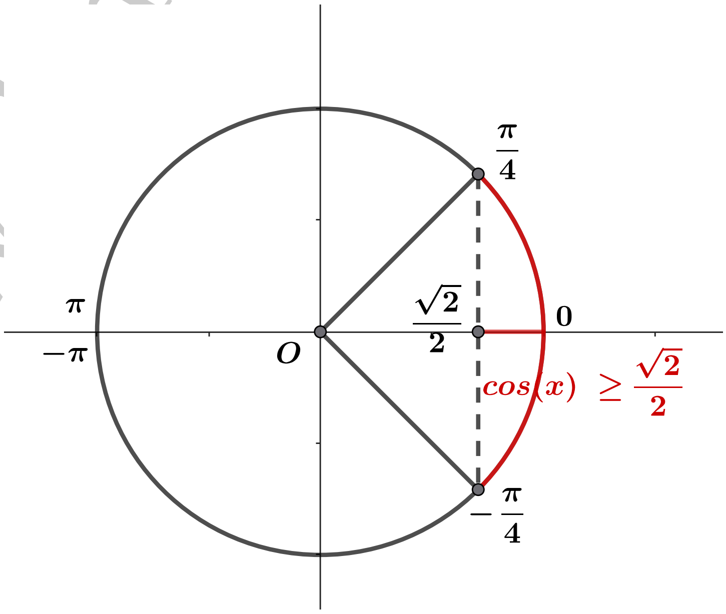


FIGURE 20 – Exemple 2

V-2- ÉQUATION : $sin(x) = a$ - INÉQUATIONS : $sin(x) \geqslant a$; $sin(x) \leqslant a$

Proposition

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Si $|a| > 1$, alors l'équation $sin(x) = a$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$ donc $S = \varnothing$.
- Si $|a| \leqslant 1$, alors il existe un réel α tel que : $sin(\alpha) = a$. Par conséquent l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $sin(x) = a$ est : $S = \{\alpha + 2k\pi, \pi - \alpha + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$.

REMARQUE

- ▲ L'ensemble des solutions de l'équation $sin(x) = 1$ est $S = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$
- ▲ L'ensemble des solutions de l'équation $sin(x) = -1$ est $S = \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$

▲ L'ensemble des solutions de l'équation $sin(x) = 0$ est $S = \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

EXEMPLE 1

Résoudre dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ l'inéquation : $sin(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

- *Onsaitque* sin($\pi\overline{_{6)=sin(\frac{5\pi}{6})=\frac{1}{2}}}$
- *Surlecercletrigonomtriqueonplacelespointsd'abscissecurvilignesrespectives* $\pi_{\overline{6}}$ et $\frac{5\pi}{6}$.
- *L'arcbleuducercletrigonomtriquecorrespondauxvaleursdexpourlesquelles* sin(x) $\leqslant \frac{1}{2}$.

  Donc $S = [-\pi, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{5\pi}{6}, \pi]$.

EXEMPLE 2

Résoudre dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ ' ; l'inéquation : $sin(x) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- *Onsaitque* sin($\pi\overline{_{4)=sin(\frac{3\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}}}$
- *Surlecercletrigonomtriqueonplacelespointsd'abscissecurvilignesrespectives* $\pi_{\overline{4}}$ et $\frac{3\pi}{4}$.
- *L'arcrougesurlecercletrigonomtriquecorrespondauxpointsducercletrigonomtrique*

  d'abscisse curviligne x tels que $sin(x) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $S = [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.

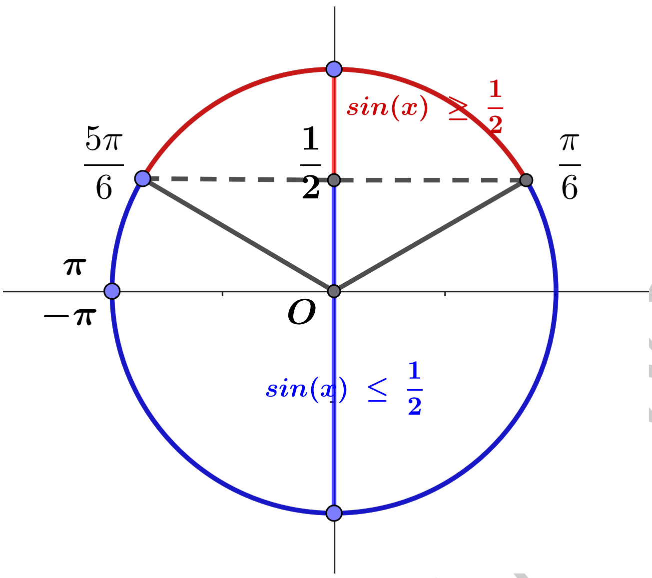


Figure 21 – Exemple 1

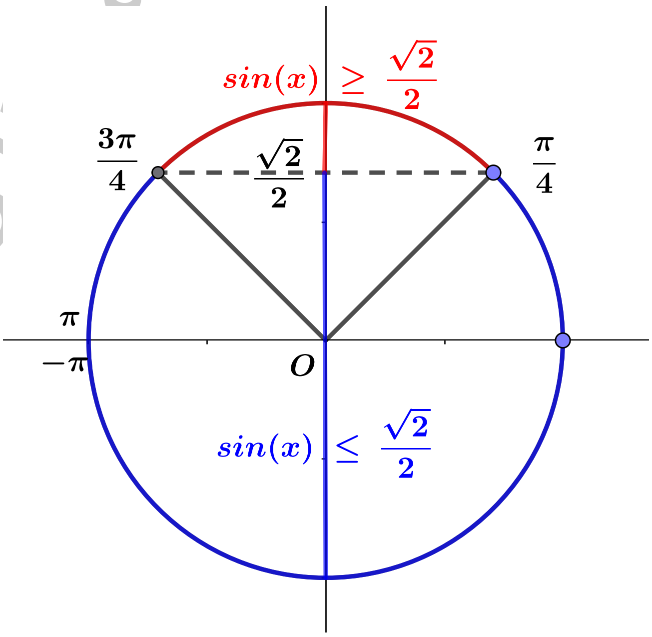


Figure 22 – Exemple 2

V-3- ÉQUATION : $tan(x) = a$ - INÉQUATIONS : $tan(x) \geqslant a$; $tan(x) \leqslant a$

Proposition

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Alors il existe un réel $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que : $tan(\alpha) = a$. Par conséquent l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $tan(x) = a$ est : $S = \{\alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

EXEMPLE 1

Résoudre dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ l'inéquation : $tan(x) \leqslant \sqrt{3}$.

- *Onsaitque* tan($\pi\overline{_{3)=\sqrt{3}}}$
- *Surlecercletrigonomtriqueonplacelepointd'abscissecurviligne* $\pi_{\overline{3}}$.
- *L'arcrougeducercletrigonomtriquecorrespondauxvaleursdexpourlesquelles* tan(x) $\leqslant \sqrt{3}$

Donc $S =]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}]$.

EXEMPLE 2

Résoudre dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ l'inéquation : $tan(x) \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

- $Onsaitque$ tan($-\pi\frac{}{6)=-\frac{\sqrt{3}}{3}}$
- $Surlecercletrigonomtriqueonplacelepointd'abscissecurviligne$ $-\pi_{\overline{6}}$.
- $L'arcbleusurlecercletrigonomtriquecorrespondauxpointsducercletrigonomtrique$ d'abscisse curviligne x tels que $tan(x) \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $S = [\frac{-\pi}{6},\frac{\pi}{2}[$.

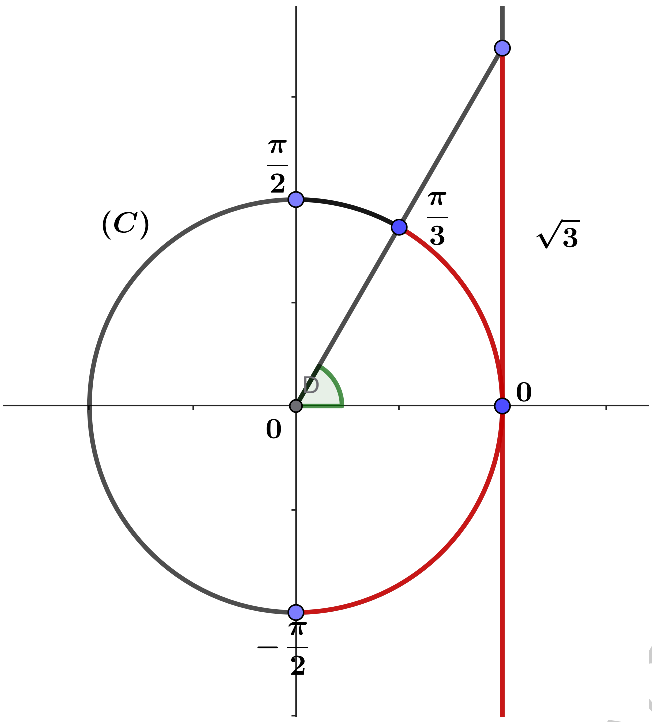


FIGURE 23 – Exemple 1

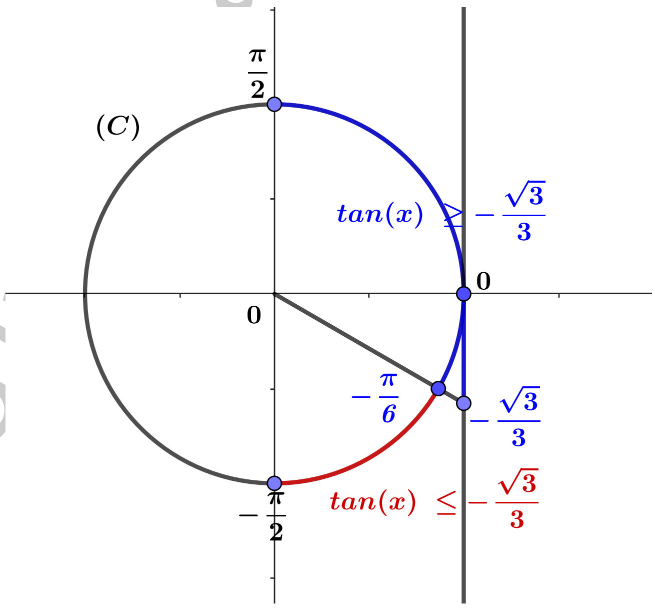


FIGURE 24 – Exemple 2

VI- ANGLES INSCRITS - QUADRILATÈRES INSCRIPTIBLES

VI-1- ANGLES INSCRITS - ANGLES AU CENTRE

Définition

Soit (C) un cercle de centre O, et soient A et B deux points du cercle (C).
* Soit M un point du cercla (C). L'angle $\widehat{AMB}$ est appelé **un angle inscrit au cercle (C) qui intercepte la corde** $[AB]$.
* L'angle $\widehat{AOB}$ est appelé **un angle au centre du cercle (C)**. On dit que l'angle au centre $\widehat{AOB}$ intercepte l'arc du cercle $\widehat{AB}$

Proposition

Soit (C) un cercle de centre O, et soient A et B deux points du cercle (C).
- Si **deux angles inscrits dans un cercle (C) interceptent la même corde, alors ils sont isométriques ou supplémentaires**

Autrment dit : $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$ ou $\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = \pi$
- Si **un angle inscrit et un angle au centre intercepte le même arc de cercle, alors la mesure de**

l'angle au centre est le double de celle de l'angle inscrit
Autrement dit : $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$

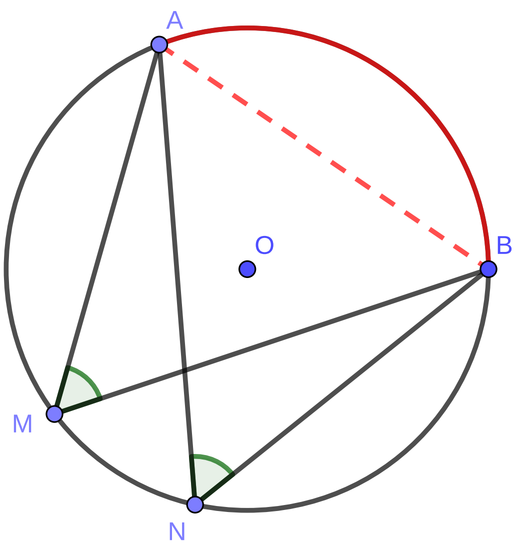


FIGURE 25 – $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$

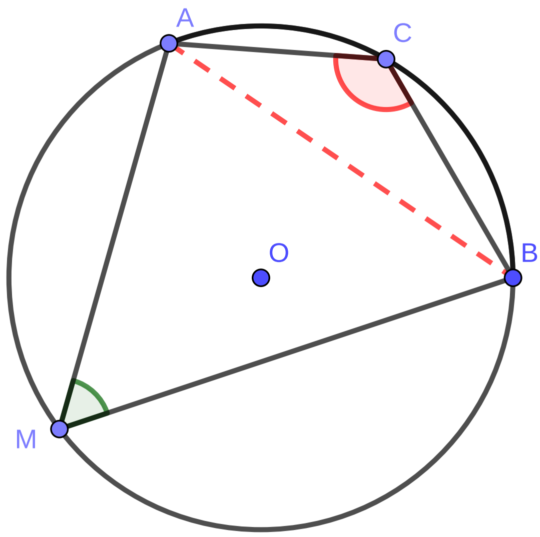


FIGURE 26 – $\widehat{AMB} + \widehat{ACB} = \pi$

VI-2- QUADRILATÈRES INSCRIPTIBLES

Proposition

Un quadrilatère ABCD est inscriptible si, et seulement si : $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$ ou $\widehat{DAB} + \widehat{DCB} = \pi$

REMARQUE

Un quadrilatère est inscriptible si ses quatre sommets appartiennent à un même cercle.

VI-3- RELATIONS MÉTRIQUES DANS UN TRIANGLE

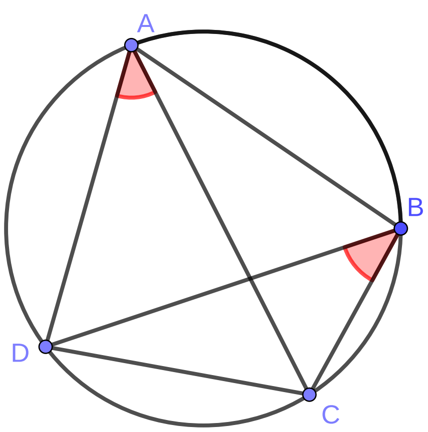


FIGURE 27 – $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$

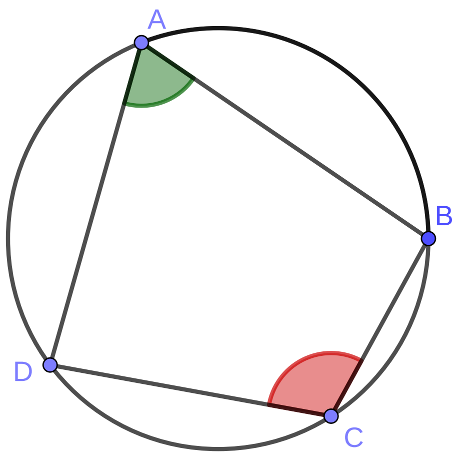


FIGURE 28 – $\widehat{DAB} + \widehat{DCB} = \pi$

Proposition

Soit ABC un triangle.
On pose : $a = BC; b = AC; c = AB$ et S son aire et $p = a+b+c$ son périmètre et R et r les rayons respectivement des cercles circonscrit et inscrit au triangle ABC . Alors :

- ▲ $\dfrac{a}{sin(\widehat{A})} = \dfrac{b}{sin(\widehat{B})} = \dfrac{c}{sin(\widehat{C})} = 2R = \dfrac{abc}{2S}$
- ▲ $S = \frac{1}{2}absin(\widehat{C}) = \frac{1}{2}acsin(\widehat{B} = \frac{1}{2}bcsin(\widehat{A}$
- ▲ $S = \frac{1}{2}rp$
- ▲ $S = \dfrac{abc}{4R}$.

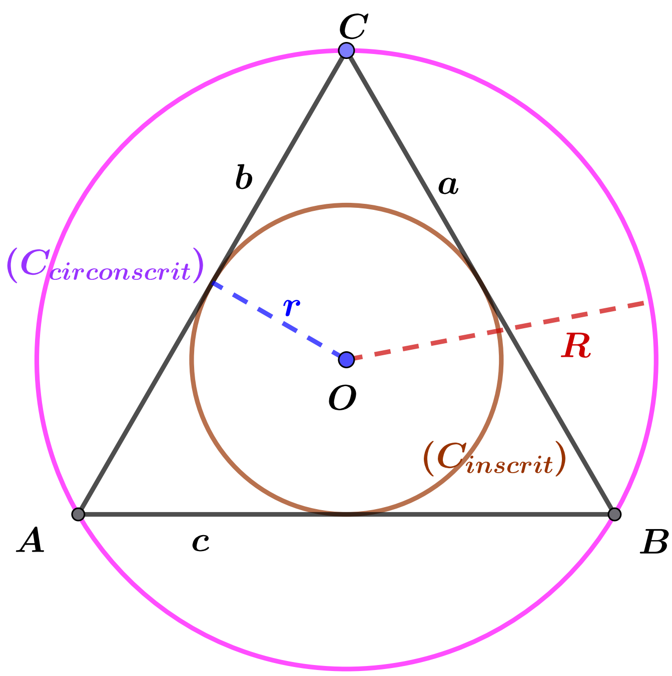


Figure 29 – Relations métriques dans un triangle ABC