

# LA SYMÉTRIE CENTRALE

## TABLES DES MATIÈRES

- I - Le symétrique d'un point
- II - Le symétrique d'un segment
- III - Le symétrique d'une droite
- IV - Le symétrique d'une demi-droite
- V - Les symétriques des points alignés
- VI - Le symétrique d'un angle
- VII - Le symétrique d'un cercle
- VIII - Centre de symétrie d'une figure

# I - LE SYMÉTRIQUE D'UN POINT

## DÉFINITION

- ★ On dit que le point  $B$  est le symétrique du point  $A$  par rapport au point  $O$  si, et seulement si le point  $O$  est le milieu du segment  $[AB]$ .
- ★ On dit aussi que le point  $B$  est l'image du point  $A$  par la symétrie centrale de centre le point  $O$ .
- ★ Le point  $O$  est appelé centre de symétrie.

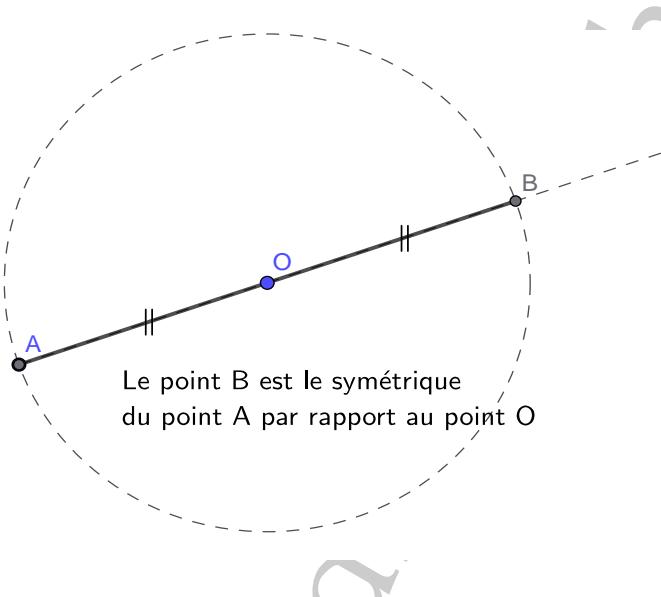


FIGURE 1 –

## CONSTRUCTION DU SYMÉTRIQUE D'UN POINT PAR RAPPORT A UN POINT O

Pour construire le symétrique d'un point  $A$  par rapport à un point  $O$ , on procède comme suit :

- On trace la demi-droite  $[AO)$
- On trace le cercle de centre  $O$  et de rayon  $OA$
- Ce cercle coupe la demi-droite  $[AO)$  en un point  $B$ .
- Ce point  $B$  est le symétrique de  $A$  par rapport à  $O$ .

## PROPOSITION

- ▲ Le symétrique du point  $O$  par rapport à  $O$  est le point  $O$  lui même .
- ▲ L'unique point invariant par une symétrie centrale est son centre.

# II - LE SYMÉTRIQUE D'UN SEGMENT

## PROPOSITION 1

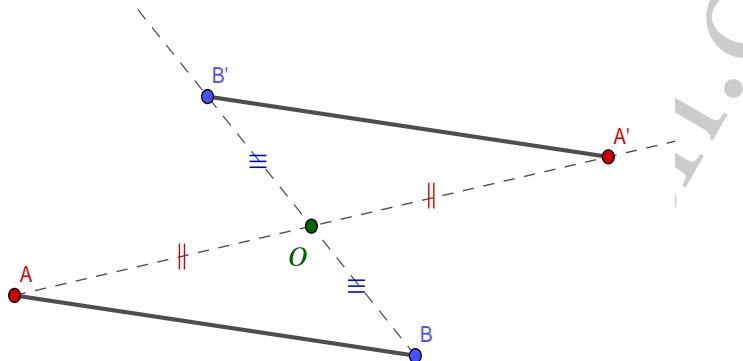
Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan et soient  $A'$  le symétrique de  $A$  et  $B'$  le symétrique de  $B$  par rapport à un point  $O$ , alors le symétrique du segment  $[AB]$  par rapport au point  $O$  est le segment  $[A'B']$

## PROPOSITION 2

Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan et soient  $A'$  le symétrique de  $A$  et  $B'$  le symétrique de  $B$  par rapport à un point  $O$ , alors le segment  $[AB]$  et son symétrique  $[A'B']$  par rapport au point  $O$ , sont parallèles et ont la même longueur

## CONSTRUCTION DU SYMÉTRIQUE D'UN SEGMENT [AB] PAR RAPPORT A UN POINT O

- Pour construire le symétrique d'un segment  $[AB]$  par rapport à un point  $O$ , on procède comme suit :
- On trace le symétrique  $A'$  de l'extrémité  $A$  et le symétrique  $B'$  de l'extrémité  $B$  par rapport au point  $O$
  - On trace le segment  $[A'B']$
  - Le segment  $[A'B']$  ainsi construit est le symétrique du segment  $[AB]$  par rapport à  $O$ .



*L'image de  $[AB]$  par la symétrie centrale de centre  $O$  est  $[A'B']$*

FIGURE 2 –

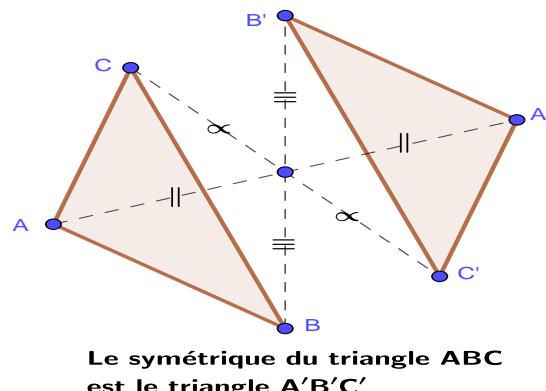
### PROPRIÉTÉ 1

**La symétrie centrale conserve les longueurs**

Autrement dit : Si  $[A'B']$  est le symétrique de  $[AB]$  par la symétrie centrale  $S_O$  de centre le point  $O$ , alors  $A'B' = AB$ .

### PROPOSITION 3

**Le symétrique du triangle  $ABC$  par la symétrie centrale de centre un point  $O$  est un triangle de même nature  $A'B'C'$  tel que  $A', B', C'$  sont les symétriques respectifs des sommets  $A, B, C$ .**



**Le symétrique du triangle  $ABC$  est le triangle  $A'B'C'$**

FIGURE 3 –

## III - LE SYMÉTRIQUE D'UNE DROITE

### PROPOSITION

Le symétrique d'une droite ( $D$ ) par la symétrie centrale de centre un point  $O$  est la droite ( $D'$ ) telle que  $(D) \parallel (D')$ .

### COROLLAIRE

Le symétrique d'une droite ( $AB$ ) par la symétrie centrale de centre un point  $O$  est la droite ( $A'B'$ ) telle que  $A', B'$  sont les symétriques respectifs des points  $A, B$ .

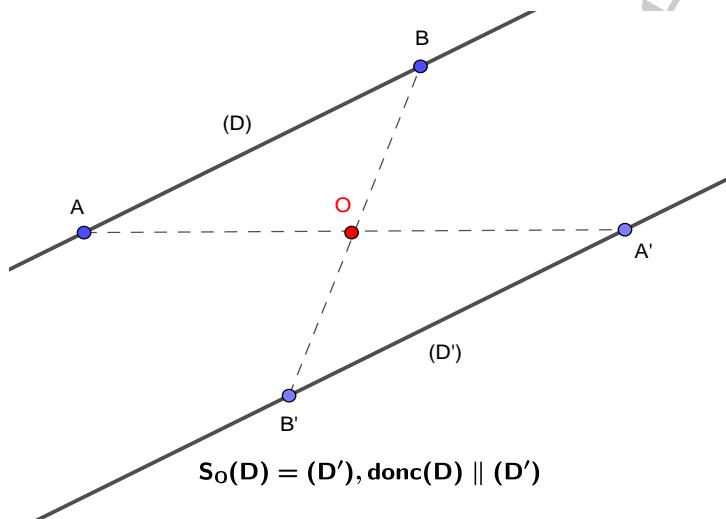


FIGURE 4 –

### CONSTRUCTION DU SYMÉTRIQUE D'UNE DROITE $D$ PAR RAPPORT A UN POINT $O$

Pour construire le symétrique d'une droite ( $D$ ) par rapport à un point  $O$ , on procède comme suit :

- On prend deux points quelconques  $A, B$  de la droite ( $D$ ) puis on trace le symétrique  $A'$  du point  $A$  et le symétrique  $B'$  du point  $B$  par rapport au point  $O$
- On trace la droite ( $A'B'$ )
- La droite ( $A'B'$ ) ainsi construite est la ( $D'$ ) le symétrique de la droite ( $D$ ) par rapport à  $O$ .

### REMARQUE

Si le point  $O$  appartient à la droite ( $D$ ), alors le symétrique de la droite ( $D$ ) par rapport au point  $O$  est la droite ( $D$ ) elle-même.

## IV - LE SYMÉTRIQUE D'UNE DEMI-DROITE

### PROPOSITION

Le symétrique d'une demi-droite  $[AB]$  par la symétrie centrale de centre un point  $O$  est la demi-droite  $[A'B']$  telle que  $A', B'$  sont les symétriques respectifs des points  $A, B$  et  $(A'B') \parallel (AB)$ .

### CONSTRUCTION DU SYMÉTRIQUE D'UNE DEMI-DROITE $D$ PAR RAPPORT A UN POINT $O$

Pour construire le symétrique d'une demi-droite  $[AB]$  par rapport à un point  $O$ , on procède comme suit :

- On construit le symétrique  $A'$  du point  $A$  et le symétrique  $B'$  du point  $B$  par rapport au point  $O$
- On trace la demi-droite  $[A'B']$
- La demi-droite  $[A'B']$  ainsi construite est le symétrique de la demi-droite  $[AB]$  par rapport à  $O$ .

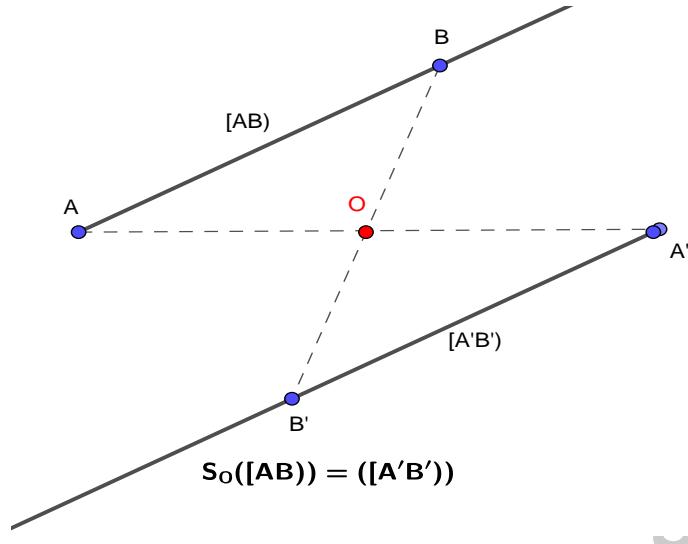


FIGURE 5 –

## V - LES SYMÉTRIQUES DES POINTS ALIGNÉS

### PROPOSITION

Les symétriques par rapport à un point  $O$  de trois points alignés  $A, B$  et  $C$  sont les trois points alignés  $A', B'$  et  $C'$  tels que  $A', B'$  et  $C'$  sont les symétriques respectifs des points  $A, B$  et  $C$  par rapport au points  $O$

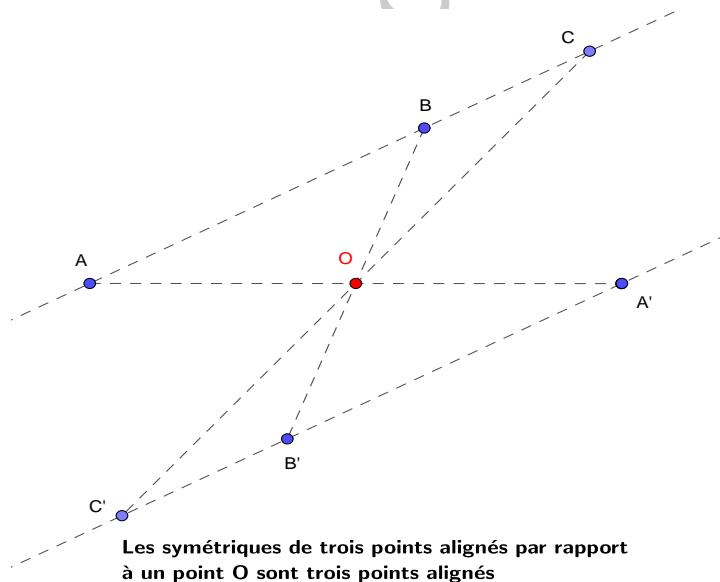


FIGURE 6 –

### PROPRIÉTÉ 3

La symétrie centrale conserve l'alignement des points

## V - LE SYMÉTRIQUE D'UN ANGLE

### **PROPOSITION**

Le symétrique par rapport à un point  $O$  d'un angle  $\widehat{BAC}$  est l'angle  $\widehat{B'A'C'}$  qui a la même mesure que  $\widehat{BAC}$  où  $A', B'$  et  $C'$  sont les symétriques respectifs des points  $A, B$  et  $C$  par rapport au points  $O$

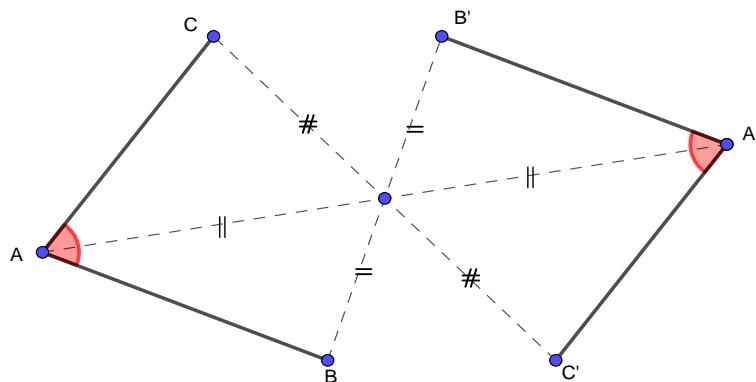


FIGURE 7 –

### **PROPRIÉTÉ 4**

La symétrie centrale conserve les mesures des angles

## **V - LE SYMÉTRIQUE D'UN CERCLE**

### **PROPOSITION**

Le symétrique par rapport à un point  $A$  d'un cercle  $(C)$  de centre  $O$  et de rayon  $r$  est le cercle  $(C')$  de centre  $O'$  et de même rayon  $r$  où  $O'$  est le symétrique de  $O$  par rapport à  $A$

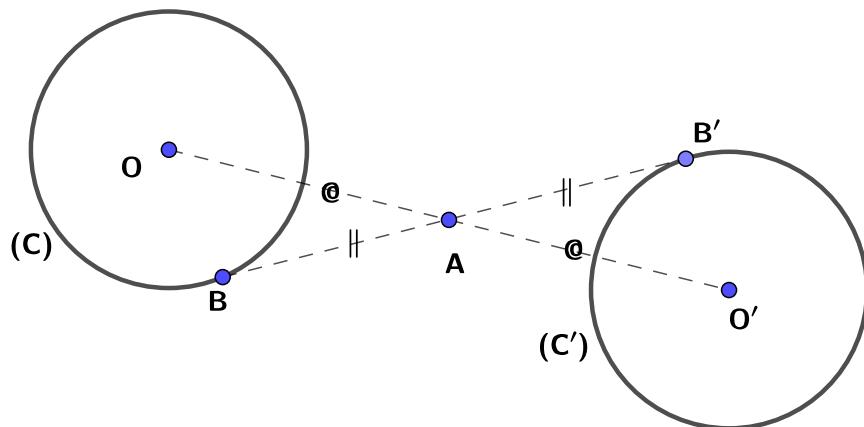


FIGURE 8 –

## **CONSTRUCTION DU SYMÉTRIQUE D'UN CERCLE $(C)$ PAR RAPPORT A UN POINT $A$**

Pour construire le symétrique d'un cercle ( $\mathcal{C}$ ) de centre  $O$  et de rayon  $r$  par rapport à un point  $A$ , on procède comme suit :

- On construit le symétrique  $O'$  du point  $O$  et le symétrique  $B'$  d'un point  $B$  du cercle ( $\mathcal{C}$ ) par rapport au point  $A$
- On trace le cercle ( $\mathcal{C}'$ ) de centre  $O'$  et passant par le point  $B'$
- Le cercle ( $\mathcal{C}'$ ) ainsi construit est le symétrique du cercle ( $\mathcal{C}$ ) par rapport au point  $A$ .

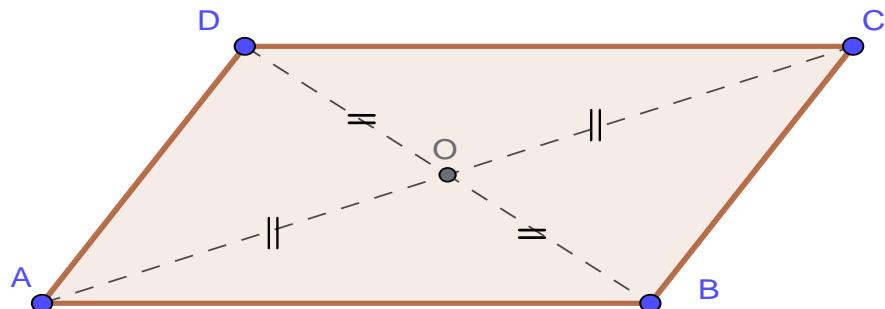
## VI - CENTRE DE SYMÉTRIE D'UNE FIGURE

### DÉFINITION

Lorsque le symétrique d'une figure ( $\mathcal{F}$ ) par rapport à un point  $O$  est la figure ( $\mathcal{F}$ ) elle même, on dit que **le point  $O$  est un centre de symétrie de la figure ( $\mathcal{F}$ )**.

### EXEMPLES DE FIGURES GÉOMÉTRIQUES QUI ADMETTENT UN CENTRE DE SYMÉTRIE

- Le cercle : Son centre est le centre de symétrie.
- Le parallélogramme : Le point d'intersection de ses diagonales est son centre de symétrie. En particulier le rectangle, le carré et le losange.
- L'hexagone régulier : Le point d'intersection de ses diagonales est son centre de symétrie.



Le centre de symétrie d'un parallélogramme est  
le point d'intersection de ses diagonales

FIGURE 9 –

