SÉRIE 2 : LES POLYNÔMES

Exercice 1

Déterminer les réels a, b et c pour que les égalités suivantes soient valides pour tout réel x :

- $(x-1)(ax^2+bx+c) = -2x^3-3x^2+5x$
- $(x-2)^2(ax^2+bx+c) = 3x^4-12x^3+18x^2-24x+24$
- $(x^2-1)(ax^3+bx^2+cx) = x^5+x^3-2x$

Exercice 2

On considère le polynôme défini par : $P(x) = 2x^3+5x^2-x-6$.

1. Vérifier que ni 0 ni 3 ne sont des racines du polynôme $P(x)$.
2. Justifier que -2 est une racine de $P(x)$.
3. Déterminer un polynôme $Q(x)$ tel que pour tout réel x on a : $P(x) = (x+2)Q(x)$.
4. Montrer que le polynôme $Q(x)$ est divisible par $(x-1)$, puis factoriser le polynôme $Q(x)$.
5. En déduire une factorisation du polynôme $P(x)$ en produit de trois binômes.
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 3

1. Déterminer un polynôme du second degré $P(x)$ tel que pour tout réel x on a : $P(x+1)-P(x) = x$.
2. En déduire que pour tout entier naturel non nul n on a : $1+2+3+...+n = P(n+1)-P(1)$
3. Calculer sans utiliser la calculatrice la somme $S = 1+2+3+...+1295$.

Exercice 4

On considère le polynôme $P(x) = x^3-x^2-3x-1$.

1. Vérifier que 1 est une racine du polynôme $P(x)$.

2. Déterminer le polynôme du second degré $Q(x)$ tel que pour tout réel x on a : $P(x) = (x+1)Q(x)$
3. Calculer $Q(1+\sqrt{2})$ et en déduire $P(1+\sqrt{2})$.
4. Déterminer le réel b tel que, pour tout réel x on a : $Q(x) = (x-1-\sqrt{2})(x+b)$.
5. Montrer que pour tout x de $]2, 1+\sqrt{2}[$ on a : $-4 < P(x) < 0$.

Exercice 5

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$.

1. Calculer $P(4)$ et $P(-1)$. Que peut-on conclure ?
2. Déterminer le polynôme du second degré $Q(x)$ tel que pour tout réel x on a : $P(x) = (x-4)Q(x)$
3. Montrer que $Q(x)$ est divisible par $(x+2)$.
4. Déterminer le réel b tel que, pour tout réel x on a : $Q(x) = (x+2)(x+b)$.
5. Écrire $P(x)$ sous forme du produit de trois binômes.
6. Soit $x \in [1, 2]$.
   a. Montrer que $0 \leq Q(x) \leq 4$.
   b. En déduire que $-12 \leq P(x) \leq 0$.

Exercice 6

1. Déterminer les réels p et q de telle sorte que le polynôme $x^4 + px^2 + q$ soit divisible par $x^2 - 6x + 5$.
2. Déterminer les réels p et q de façon que le polynôme $x^4 + px^2 + q$ soit divisible par $x^2 + px + q$.
3. Montrer que si l'équation $x^3 + px + q = 0$ admet trois solutions a, b et c , alors $a + b + c = 0$.
4. Soit le polynôme $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, On note a, b et c ses trois solutions.Sans calculer a, b et c , calculer :
   - $S = a + b + c$
   - $P = abc$
   - $T = ab + bc + ac$
   - $Q = a^2 + b^2 + c^2$
   - $K = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$
   - $L = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$