Série 3 : CALCUL VECTORIEL

Exercice 1

Soit $ABCD$ un parallélogramme et soient M et N deux points du plan tels que : $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$.

1. Construire une figure convenable.
2. Montrer que : $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}$.
3. Montrer que : C , M et N sont alignés.
4. Soit E le point du plan tel que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BF}$.
   Montrer que C est le milieu du segment $[EF]$.
5. Montrer que $(BD) \parallel (EF)$.

Exercice 2

Soit ABC un triangle tel que $BC = 3$; $AC = 4$; $AB = 5$ et soient E ; F ; K et G des points du plan tels que : $3\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BE} = \vec{0}$; $3\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{CF} = \vec{0}$; $2\overrightarrow{BK} - \overrightarrow{CK} = \vec{0}$ et $3\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$; et que $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que : $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{BC}$ et en déduire que $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
3. a) Montrer que $5\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.
   b) Montrer que $3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{KG} = \vec{0}$.
4. En déduire que G est le point d'intersection des droites (CE) et (AK).
5. Montrer que G est le milieu du segment $[BF]$.
6. Écrire $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
7. Construire le triangle ABC et les points E ; F ; K et G .

Exercice 3

Soit $ABCD$ un parallélogramme et soient I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[DC]$ et E et F deux points du plan tels que : $\overrightarrow{BE} = a\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = b\overrightarrow{AD}$ où a et b sont deux réels quelconques.

1. Faire une figure convenable dans le cas où $a=\frac{1}{2}$; et $b=\frac{3}{4}$.
2. Calculer les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Calculer les vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{JF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4. Établir une relation entre les réels a et b pour que les droites (IE) et (JF) soient parallèles.

Exercice 4

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et soient I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[DC]$.

1. Montrer que $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.
2. On suppose que $ABCD$ est un trapèze et on pose $\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{AD}$. Soit M le milieu de $[AC]$ et N le milieu de $[BD]$.
   - a. Montrer que : $\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{MJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
   - b. Montrer que $\overrightarrow{IJ}=\frac{k+1}{2}\overrightarrow{AD}$.
   - c. Déterminer la valeur du réel k pour que $\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{MJ}=\overrightarrow{NM}$.

Exercice 5

Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque et G le point du plan vérifiant la relation vectorielle : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.
2. Soit M et P les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.
   - a. Montrer que $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GP}=\vec{0}$.
   - b. En déduire que G est le milieu de $[MP]$.
   - c. Construire le point G .
3. Soit N et Q les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AD]$.

   Montrer que $\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GQ}=\vec{0}$.
4. Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.