SÉRIE 4: DÉRIVABILITÉ ET SES APPLICATIONS

Exercice 1

On considère une fonction f définie et continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ telle que : $f(0)-f(1)=-1$.
Montrer, en utilisant le théorème de Rolle que :

$$(\exists c \in]0,1[)\,,\ \frac{f'(c)}{c}=\frac{4}{(c^2+1)^2}$$

.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}[$ par : $f(x)=\frac{\pi}{2}-sinx$ et soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}[\\ u_{n+1}=f(u_n)\,,\ \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}[$.
2. Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}\,,\ \frac{\pi}{6}<u_n<\frac{\pi}{2}$.
3. a. Montrer que $(\forall x \in]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}[\,,\ |f'(x)|\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   b. En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})\,,\ |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{\sqrt{3}}{2}|u_n-\alpha|$.
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 3

Soit t un nombre réel tel que $t>0$ et soit n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par $f_n : x\mapsto x^n-t(1-x)$.

1. Prouver que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution u_n dans $]0,1[$.
2. Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $f_{n+1}(u_n)=-t(1-u_n)^2$.
3. Déduire que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
4. En déduire que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 4

On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par : $f(x) = cos\left(\sqrt{x}\right)$.

1. Montrer que la fonction f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
2. Démontrer que $(\forall t \in [0,1])$: $0 \leq sin(t) \leq t$.
3. Justifier que la fonction f admet un unique point fixe α dans $]0,1[$.
4. Démontrer que la fonction f est $\frac{1}{2} - lipschitzienne$ sur $[0,1]$.
5. On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ ; } \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   a. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
   b. En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

Exercice 5

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par : $f(x) = arctan(x) + 1$.

1. Montrer que f est une bijection de $[0,+\infty[$ vers un intervalle J à déterminer.
2. a. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[0,+\infty[$ une solution unique notée β et que $0 < \beta < 3$.
   b. Étudier le signe de $f(x) - x$.
   c. Montrer que $f\left([0,+\infty[\right) \subset [0,+\infty[$.
3. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 3$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \geq 3$.
   b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   c. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 6

On considère la suite numérique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} a_0 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \frac{1+\sqrt{1+a_n^2}}{a_n} \end{cases}$$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\sqrt{2} \leq a_n \leq 1 + \sqrt{2}$.
2. a. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\sqrt{1 + a_n^2} - 1 + a_n\sqrt{3} \geq \sqrt{6}$.
   b. En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|a_{n+1} - \sqrt{3}| \leq k|a_n - \sqrt{3}|$; où k est un

nombre réel de l'intervalle $]0,1[$ que l'on déterminera.

c Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|a_n - \sqrt{3}| \leq k^n(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

3 a Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists! z_n \in \mathbb{R})$, $a_n = tan(z_n)$

b Montrer que $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{tan(x)}{1+\sqrt{1+tan^2(x)}}$.

c En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $z_{n+1} = -\frac{1}{2}z_n + \frac{\pi}{2}$.

4 On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = z_n - \frac{\pi}{3}$.

a Vérifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

b Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.