

SÉRIE 7: LES SUITES NUMÉRIQUES

Exercice 1

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 3$.

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f_n(x) = x^n + x^2 + x - 1$ et soit α la solution positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.

- ① Sans déterminer α , montrer que $0 < \alpha < 1$.
- ② Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}^+$ une unique solution notée u_n .
- ③ Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $0 < u_n < \alpha$.
- ④ Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est croissante et convergente.
- ⑤ Montrer que $(\forall n \geq 3)$, $u_n^n + (u_n - \alpha)(u_n + \frac{1}{n}) = 0$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2$, on pose : $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$.

- ① Montrer que $(\forall n \geq 2)$, $a_n \geq 0$.
- ② Montrer que $(\forall n \geq 2)$, $n \geq C_n^2(a_n)^2$ et en déduire que $(\forall n \geq 2)$, $a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$.
- ③ Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction h_n définie sur l'intervalle $]0, 1[$ par :

$$h_n(x) = (1-x)(x+1)^n.$$

- ① Étudier les variations de la fonction h_n sur $]0, 1[$.
- ② Montrer que l'équation $h_n(x) = 1$ admet dans $]0, 1[$ une unique solution notée x_n .
- ③
 - a Montrer que : $(\forall x \in]0, 1[)$, $h_{n+1}(x) < h_n(x)$.
 - b Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $x_{n+1} \in]\frac{n-1}{n+1}, 1[$.
 - c Étudier la monotonie de la suite (x_n) .
 - d Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Exercice 4

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \left(\frac{n}{n^2 + k} \right).$$

- ① Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), \frac{2n}{n+1} \leq u_n \leq \frac{2n+2}{n}$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- ② Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \right)$ et $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.
 - a Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}^*), \frac{1}{2k} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$, puis déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), v_n \leq 2\sqrt{n}$.
 - b Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), 2n + 2 - 2v_{n+1} \leq S_n \leq 2n + 2v_n$.
 - c Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), 2n - 4\sqrt{n+1} \leq S_n \leq 2n + 4\sqrt{n}$.
- ③ Calculer les limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.

Exercice 5

Pour tout entier naturel non nul n , on pose $U_n = \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

- ① Montrer que $(\forall n \geq 1), \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$.
- ② Dédurre un encadrement de U_n .
- ③ Montrer que la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 6

- ① Pour tout entier naturel non nul n , on considère l'équation

$$(E_n) : x^3 + 5x = n$$

- a Montrer que l'équation (E_n) admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution notée α_n et que $\alpha_n > 0$.
- b Montrer que $\alpha_1 < \frac{1}{5}$.
- c Montrer que la suite (α_n) est croissante et déterminer sa limite.
- ② a Prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \alpha_n \leq \sqrt[3]{n}$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n}$.
- b Vérifier que $\left(\frac{\alpha_n}{\sqrt[3]{n}} \right)^3 + 5 \left(\frac{\alpha_n}{n} \right) = 1$, puis déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt[3]{n}} = 1$.

Exercice 7

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- ① Calculer les termes $u_1 ; u_2 ; u_3$.
- ② Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N} ; 1 \leq u_n \leq \frac{3}{2})$
- ③ Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^* ; |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{4} |u_n - u_{n-1}|)$
- ④ Pour tout entier naturel n , on pose $\alpha_n = u_{2n}$ et $\beta_n = u_{2n+1}$.
Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N} ; \beta_n = 1 + \frac{1}{1+\alpha_n})$.
- ⑤ Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N} ; \alpha_n \leq \beta_n)$.
- ⑥ Montrer que la suite (α_n) est croissante et que la suite (β_n) est décroissante.
- ⑦ Montrer que les suites (α_n) et (β_n) convergent vers la même limite.
- ⑧ Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N} ; |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{4} |u_n - \sqrt{2}|)$.
- ⑨ En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = x^3 + x^2 - nx - 1$$

- ① a Calculer $f'_n(x)$, puis résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation $f'_n(x) = 0$.
On note par α_n cette solution.
- b Montrer que : $\alpha_n^2 = \frac{n-2\alpha_n}{3}$. Puis déterminer deux nombres rationnels u_n et v_n tels que $f_n(\alpha_n) = u_n + v_n u_n$.
- c Dresser le tableau de variation de la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$.
- ② a Montrer que l'équation $f'_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}^+$.
- b Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2), \alpha_n < x_n < \sqrt{n}$.
- c Dédire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.
- d Etudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n \geq 2}$.
- ③ a Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2), n = x_n^2 + x_n - \frac{1}{x_n}$.
- b Dédire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{x_n} = 1$.