SÉRIE 1 : ROTATION DANS LE PLAN

Exercice 1

Soit $ABCD$ un losange tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et soit E le symétrique de C par rapport à B.

1. a Montrer qu'il existe une unique rotation R telle que : $R(B) = D$ et $R(E) = B$.
   b Déterminer l'angle de la rotation R.
   c Montrer que A est le centre de la rotation R.
2. Soit I le milieu de $[BE]$ et $J = R(I)$. Montrer que A, J et C sont alignés.
3. Soit H le projeté orthogonal de I sur (AB). La parallèle à (BD) passant par H coupe (AD) au point K.
   a Montrer que $R(H) = K$.
   b Montrer que les droites (KJ) et (AD) sont perpendiculaires.

Exercice 2

1. Soit $ABCD$ un carré direct tel que $AB = 5cm$ et soit E le symétrique de A par rapport à D. Calculer AC.
2. Soit R la rotation de centre D qui transforme A en C.
   a Déterminer l'angle de la rotation R.
   b Déterminer l'image de la droite (AB) par la rotation R.
   c Montrer que $R(C) = E$ et en déduire que $(AC) \perp (EC)$.
2. Soit (C) le cercle de diamètre $[AC]$ et M un point de (C) distinct de A et de C et M' son image par R.
   a Déterminer la nature du triangle AMC.
   b Déduire la nature du triangle $EM'C$.

Exercice 3

Soit ABC un triangle rectangle en A dans le sens direct tel que $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.
Soient I et J deux points du plan à l'extérieur du triangle ABC tels que les triangles AIB et BJC soient des triangles équilatéraux.
On désigne par K le symétrique de A par rapport à la droite (BC).

1. Tracer une figure convenable
2. Soit R la rotation de centre B et d'angle $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.
   - a) Préciser $R(I)$ et $R(C)$ et en déduire que $IC = AJ$.
   - b) Montrer que $R(A) = K$ et que K est le milieu de $[CJ]$.
3.
   - a) Montrer que le quadrilatère $AIBK$ est un losange.
   - b) Déduire que les droites (IA) et (CJ) sont perpendiculaires.
4. On désigne par (C_1) et (C_2) les cercles de centres respectifs I et A et de rayon r où $r > 0$.
   - a) Montrer que $R(C_1) = (C_2)$.
   - b) La droite (IC) coupe (C_1) en M et la droite (AJ) coupe (C_2) en N. Montrer que $R(M) = N$.

Exercice 4

Soit $MNPQ$ un carré de centre O tel que $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit E un point de la demi-droite $[QM)$ et extérieur au carré $MNPQ$.
On considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Faire une figure convenable.
2. Déterminer l'image de la droite (MN) par la rotation R.
3. Soit F l'image de E par la rotation R. Démontrer que F appartient à la droite (MN) et que $ME = NF$ puis construire F.
4. Soit G le symétrique de E par rapport à O.
   - a) Démontrer que $R(F) = G$.
   - b) Déduire que le triangle EFG est un triangle rectangle et isocèle.

Exercice 5

Soient $ABCD$ et $AEFG$ deux carrés tels que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$,
$AD = AE$, $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AG}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

1. Construire une figure convenable.
2. Montrer que $\frac{5\pi}{6}$ est l'angle de la rotation R de centre A et qui transforme B en E.
3. a. Déterminer $R(C)$ et $R(D)$.

   b. Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{EF}}\right)$.
4. Déterminer l'image de la droite (BC) par la rotation R.
5. Soit K le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(B, -1)$, $(C, -1)$.
On pose $R(H) = K$. Montrer que les points F, G et H sont alignés.