SÉRIE 2 : BARYCENTRE DANS LE PLAN

Exercice 1

ABC est un triangle. On considère les points G, E, F et K tels que
$G = bary\{(A,1);(B,2);(C,3)\}$; $E = bary\{(A,1);(B,2)\}$; $F = bary\{(A,1);(C,3)\}$
et $K = bary\{(B,2);(C,3)\}$.

1. Écrire le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2. Montrer que $A = bary\left\{(G,1);(B,-\frac{-}{3});(C,-\frac{1}{2})\right\}$.
3. Construire les points E, F et K et les droites (CE) , (BF) et (AK)
4. Montre que G est le milieu de $[CE]$
5. Montrer que $G \in (BF)$
6. Montrer que $G \in (AK)$
7. Déduire que les droites $(CE),(BF)$ et (AK) sont concourantes en G.

Exercice 2

Soit ABCD un parallélogramme et soient les points P, R et Q tels que
$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et le quadrilatère PARQ est un parallélogramme.

1. Faire une figure soignée.
2. Déterminer les réels α et β tels que P est le barycentre du système $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$.
3. Déterminer les réels x et y tels que R est le barycentre du système $\{(A,x);(D,y)\}$.
4. Montrer que (BR) et (DP) sont sécantes au point I le barycentre du triangle ABD dont on précisera les coefficients.
5. Prouver que Q est le barycentre du système $\{(A,-5);(B,8);(D,9)\}$.
6. Montrer que les points A, I ,Q et C sont alignés.
7. Préciser la position du point Q sur la droite (IC).
8. Montrer que les droites (BR),(CQ) et (DP) sont concourantes.

Exercice 3

ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 4$ et $BC = 5$ et soit G le centre de gravité de ABC.
Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan dans chacun des cas suivants :

- ★ $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 6$
- ★ $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$
- ★ $\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$

Exercice 4

A Soient A, B, C trois points du plan, et a, b , c trois nombres réels tels que $a + b + c + \neq 0$. soit G le barycentre du système de points pondérés $\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$

1. Démontrer que le système $\{(A,2a+1);(B,2b-2);(C,2c+1)\}$ admet un barycentre que l'on notera K.
2. Donner une relation vectorielle qui définit K, puis en déduire que $a\overrightarrow{KA} + b\overrightarrow{KB} + c\overrightarrow{KC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$
3. En déduire que G et K sont confondus si, et seulement si B est le milieu de [AC].
4. On suppose dans cette question que les points A, B et C ne sont pas alignés et soit E le point du plan tel que ABCE soit un parallélogramme.
   a. Montrer que $\overrightarrow{GK} = \dfrac{1}{2(a+b+c)}\overrightarrow{BE}$
   b. Construire G et K pour $a = c = \dfrac{1}{2}$ et $b = 2$.

B On considère le triangle isocèle ABC et H le projeté orthogonal de A sur (BC) tel que $AH = BC = 4cm$.

1. En justifiant la construction, placer le point G le barycentre du système $\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$
2. Montrer que pour tout point M du plan le vecteur $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est un vecteur constant et que $\|\vec{V}\| = 8$
3. Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan tels que $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\vec{V}\|$
4. On considère le système $\{(A,2);(B,n);(C,n)$ où n est un entier
   a. Montrer que ce système possède un barycentre pour tout entier

n que l'on notera G_n

b Construire $G_0; G_1; G_2$

c Montrer que G_n appartient au segment [AH]

c Soit $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des points M du plan tels que $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = n\|\vec{V}\|$. Montrer que $\mathcal{E}_n$ est un cercle qui passe par A, puis construire $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$

Exercice 5

Soit ABC un triangle et I et J les milieux respectifs des côtés [AB] et [AC].

1. Construire G le barycentre du système pondéré $\{(A,3);(B,2)\}$.
2. Soit H le point du plan tel que $3\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.
   - a Montrer que les points H, C et G sont alignés.
   - b Montrer que les points H, I et J sont alignés.
   - c En déduire une construction du point H.
3. La droite (AH) coupe la droite (BC) au point K.
   Montrer que K est le barycentre des points pondérés $(A,1)$ et $(H,-2)$.
4. Déterminer et construire les ensembles :
   - a $(\Delta) = \left\{M \in (\mathcal{P}) \,/\, \|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 6\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MH}\|\right\}$
   - b $(\mathcal{C}) = \left\{M \in (\mathcal{P}) \,/\, \|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MJ}\|\right\}$
   - c $(\mathcal{C}') = \left\{M \in (\mathcal{P}) \,/\, \|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = 10\right\}$

IL EST MAINTENANT GRAND TEMPS DE SE METTRE AU TRAVAIL ! ! !