

SÉRIE 2 : BARYCENTRE DANS LE PLAN

Exercice 1

ABC est un triangle. On considère les points G, E, F et K tels que $G = \text{bary}\{(A, 1); (B, 2); (C, 3)\}$; $E = \text{bary}\{(A, 1); (B, 2)\}$; $F = \text{bary}\{(A, 1); (C, 3)\}$ et $K = \text{bary}\{(B, 2); (C, 3)\}$.

- 1 Écrire le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
- 2 Montrer que $A = \text{bary}\left\{(G, 1); (B, -\frac{1}{3}); (C, -\frac{1}{2})\right\}$.
- 3 Construire les points E, F et K et les droites (CE) , (BF) et (AK)
- 4 Montre que G est le milieu de [CE]
- 5 Montrer que $G \in (BF)$
- 6 Montrer que $G \in (AK)$
- 7 Dédire que les droites (CE), (BF) et (AK) sont concourantes en G.

Exercice 2

Soit ABCD un parallélogramme et soient les points P, R et Q tels que $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et le quadrilatère PARQ est un parallélogramme.

- 1 Faire une figure soignée.
- 2 Déterminer les réels α et β tels que P est le barycentre du système $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$.
- 3 Déterminer les réels x et y tels que R est le barycentre du système $\{(A, x); (D, y)\}$.
- 4 Montrer que (BR) et (DP) sont sécantes au point I le barycentre du triangle ABD dont on précisera les coefficients.
- 5 Prouver que Q est le barycentre du système $\{(A, -5); (B, 8); (D, 9)\}$.
- 6 Montrer que les points A, I ,Q et C sont alignés.
- 7 Préciser la position du point Q sur la droite (IC).
- 8 Montrer que les droites (BR), (CQ) et (DP) sont concourantes.

Exercice 3

ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 4$ et $BC = 5$ et soit G le centre de gravité de ABC.

Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan dans chacun des cas suivants :

- ★ $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 6$
- ★ $\|\vec{MA} + \vec{MB}\| = \|\vec{MB} + \vec{MC}\|$
- ★ $\|\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = \|\vec{MB} - \vec{MC}\|$

Exercice 4

A Soient A, B, C trois points du plan, et a, b, c trois nombres réels tels que $a + b + c \neq 0$. Soit G le barycentre du système de points pondérés $\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$

- ① Démontrer que le système $\{(A, 2a + 1); (B, 2b - 2); (C, 2c + 1)\}$ admet un barycentre que l'on notera K.
- ② Donner une relation vectorielle qui définit K, puis en déduire que $a\vec{KA} + b\vec{KB} + c\vec{KC} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC})$
- ③ En déduire que G et K sont confondus si, et seulement si B est le milieu de [AC].
- ④ On suppose dans cette question que les points A, B et C ne sont pas alignés et soit E le point du plan tel que ABCE soit un parallélogramme.
 - a Montrer que $\vec{GK} = \frac{1}{2(a+b+c)}\vec{BE}$
 - b Construire G et K pour $a = c = \frac{1}{2}$ et $b = 2$.

B On considère le triangle isocèle ABC et H le projeté orthogonal de A sur (BC) tel que $AH = BC = 4\text{cm}$.

- ① En justifiant la construction, placer le point G le barycentre du système $\{(A, 2); (B, 1); (C, 1)\}$
- ② Montrer que pour tout point M du plan le vecteur $\vec{V} = 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$ est un vecteur constant et que $\|\vec{V}\| = 8$
- ③ Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan tels que $\|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\| = \|\vec{V}\|$
- ④ On considère le système $\{(A, 2); (B, n); (C, n)\}$ où n est un entier
 - a Montrer que ce système possède un barycentre pour tout entier

n que l'on notera G_n

b Construire $G_0; G_1; G_2$

c Montrer que G_n appartient au segment $[AH]$

c Soit $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des points M du plan tels que

$\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = n\|\overrightarrow{V}\|$. Montrer que $\mathcal{E}_n$ est un cercle qui passe par A, puis construire $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$

Exercice 5

Soit ABC un triangle et I et J les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[AC]$.

1 Construire G le barycentre du système pondéré $\{(A, 3); (B, 2)\}$.

2 Soit H le point du plan tel que $3\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

a Montrer que les points H, C et G sont alignés.

b Montrer que les points H, I et J sont alignés.

c En déduire une construction du point H.

3 La droite (AH) coupe la droite (BC) au point K.

Montrer que K est le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(H, -2)$.

4 Déterminer et construire les ensembles :

a $(\Delta) = \left\{ M \in (\mathcal{P}) / \|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 6\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MH}\| \right\}$

b $(\mathcal{C}) = \left\{ M \in (\mathcal{P}) / \|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MJ}\| \right\}$

c $(\mathcal{C}') = \left\{ M \in (\mathcal{P}) / \|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = 10 \right\}$

IL EST MAINTENANT GRAND TEMPS DE SE METTRE AU TRAVAIL!!!