SÉRIE 2 : TRIGONOMÉTRIE

Exercice 1

Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacun des points puis les placer sur un cercle trigonométrique :

$A\left(18\pi\right)$; $B\left(\frac{29\pi}{2}\right)$; $C\left(31\pi\right)$; $D\left(\frac{35\pi}{2}\right)$; $E\left(\frac{61\pi}{6}\right)$; $F\left(\frac{49\pi}{4}\right)$; $G\left(\frac{61\pi}{3}\right)$; $H\left(\frac{74\pi}{3}\right)$
$K\left(\frac{89\pi}{4}\right)$; $L\left(\frac{125\pi}{6}\right)$; $M\left(\frac{175\pi}{6}\right)$; $N\left(-\frac{163\pi}{4}\right)$; $P\left(-\frac{152\pi}{3}\right)$; $Q\left(-\frac{181\pi}{3}\right)$
$R\left(-\frac{241\pi}{6}\right)$; $S\left(-\frac{201\pi}{4}\right)$.

Exercice 2

Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

1. On pose $A(x) = \sin(x)\left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right)$
   - a. Calculer $A(0)$, $A\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $A\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $A\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.
   - b. Montrer que $A\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = A\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
2. On pose $B(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\cos(2x) + \sin(2x)\right)^2 - 1\right]$
   - a. Calculer $B\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $B\left(-\frac{\pi}{8}\right)$.
   - b. Montrer que $B(x) = \cos(2x)\sin(2x)$.
   - c. Montrer que $B(-x) = -B(x)$.

Exercice 3

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$ les inéquations suivantes :

- ★ (I_1) : $2\cos x \leq \sqrt{3}$
- ★ (I_2) : $2\sin x \geq \sqrt{2}$
- ★ (I_3) : $2\cos x > \sqrt{3}$
- ★ (I_4) : $2\sin x < \sqrt{2}$
- ★ (I_5) : $\left(2\sin x - \sqrt{3}\right)\cos x < 0$
- ★ (I_6) : $\dfrac{2\sin x - \sqrt{2}}{2\cos x - 1} \leq 0$

* $(I_7)\ :\ 4\cos^2 x - 3 \geq 0$
* $(I_8)\ :\ \dfrac{\sin x}{1-\cos x} \geq 0$

Exercice 4

1. a. Montrer que pour tout réel x on a ; $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

   b. Résoudre dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, les équations suivantes :

   $(E_1)\ :\ \cos x - \sqrt{3}\sin x = -1$ et $(E_2)\ :\ \cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$

2. Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle $[0, 2\pi]$:

* $(E_3)\ :\ \sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$; ★ $(E_4)\ :\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
* $(E_5)\ :\ \cos x + \sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; ★ $(E_6)\ :\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 5

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   a. $2\cos^2 x + 9\cos x + 4 = 0$

   b. $4\sin^2 x - (1+\sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} = 0$

2. a. Déterminer les racines réelles éventuelles du trinôme

   $f(t) = -4t^2 + 2(1-\sqrt{3})t + \sqrt{3}$

   b. Factoriser $f(t)$

   c. Établir dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ le signe de $2\cos x + 1$ et de $-2\cos x + \sqrt{3}$

   d. Déduire sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ le signe de $-4\cos^2 x + 2(1-\sqrt{3})\cos x + \sqrt{3}$