

Exercice 1

1) Sachant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, calculer $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

2) Calculer :

$$\cos\frac{\pi}{8} \text{ et } \sin\frac{\pi}{8} \quad ; \quad \cos\frac{\pi}{12} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad ; \quad \cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) \text{ et } \sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) \quad ;$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) \text{ et } \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

2) a) Montrer que : $\cos\frac{\pi}{18} - \sqrt{3} \sin\frac{\pi}{18} = 2\cos\frac{7\pi}{18}$

b) Montrer que : $\cos\frac{\pi}{18} \times \sin\frac{\pi}{18} = \frac{1}{2} \sin\frac{\pi}{9}$

c) Déduire la valeur de $\frac{\cos\frac{\pi}{18} - \sqrt{3} \sin\frac{\pi}{18}}{\cos\frac{\pi}{18} \times \sin\frac{\pi}{18}}$

Exercice 2

Soient a, b et c trois réels.

1) Calculer : $\cos(a+b+c)$; $\sin(a+b+c)$; $\tan(a+b+c)$

2) Calculer : $\sin(3a)$; $\cos(3a)$ et $\tan(3a)$ en fonction de $\sin(a)$, $\cos(a)$ et $\tan(a)$

Exercice 3

1) Soit x un nombre réel tel que $\cos x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $0 < x < \frac{\pi}{2}$

a) Calculer $\cos(2x)$

b) En déduire la valeur de x

2) Simplifier l'expression : $\sqrt{\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}}$

3) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\sqrt{2} \sin^2 x + (2 - \sqrt{2}) \cos^2 x = \sin(2x)$

Exercice 4

1) Montrer que : $\sin\left(\frac{\pi}{9}\right) \times \sin\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) \right)$ et que :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{9}\right) \times \sin\left(\frac{2\pi}{9}\right) = \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{7\pi}{9}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

2) Montrer que : $\sin\left(\frac{\pi}{9}\right) \times \sin\left(\frac{2\pi}{9}\right) \times \sin\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}$

3) En déduire que : $\sin\left(\frac{\pi}{9}\right) \times \sin\left(\frac{2\pi}{9}\right) \times \sin\left(\frac{3\pi}{9}\right) \times \sin\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{3}{16}$

Exercice 5

Calculer :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) \times \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) \quad ; \quad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad ; \quad \sin\left(\frac{7\pi}{24}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{24}\right) \quad ;$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{24}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{24}\right) \quad ; \quad \cos\left(\frac{7\pi}{24}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{24}\right) \quad ; \quad \sin\left(\frac{7\pi}{24}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{24}\right)$$

Exercice 6

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \sin \frac{\pi}{6} \times \sin \frac{k\pi}{3} = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right) \right]$

2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \sin \frac{\pi}{6} \times S_n = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi}{6} - \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{6}\right) \right]$

3) Dédurre que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), S_n = 2 \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \times \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{6}\right)$

Exercice 7

1) Soit $a \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

Montrer que : $\frac{\sin(3a)}{\sin a} - \frac{\cos(3a)}{\cos a} = 2$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x \quad ; \quad \cos(4x) = 4\cos^4 x + 4\sin^4 x - 3 \quad ; \quad \sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

3) Soit α un réel tel que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Montrer que : $\frac{1 - 2\cos(\alpha) + \cos(2\alpha)}{1 + 2\cos(\alpha) + \cos(2\alpha)} = -\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Exercice 8

1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\cos(a) \times \cos(2a) \times \cos(4a) \times \cos(8a) = \frac{\sin(16a)}{16\sin(a)}$

2) En déduire la valeur de : $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) \times \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) \times \cos\left(\frac{4\pi}{17}\right) \times \cos\left(\frac{8\pi}{17}\right)$

Exercice 9

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$$\cos(5x) = \cos x \quad ; \quad \sin(3x) = -\sin(7x) \quad ; \quad \sin(3x) = \cos x \quad ; \quad 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0 \quad ;$$

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = -1 \quad ; \quad \cos(3x)\cos(5x) - \sin(3x)\sin(5x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad 2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0$$

$$2\cos^2 x + 2\sin x \times \cos x = 3 \quad ; \quad 2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$$

Exercice 10

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, l'équation suivante :

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2} \sin(2x) + \sqrt{2} \cos(2x)$$

