

SÉRIE 3 : PRODUIT SCALAIRES DANS LE PLAN

Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Exercice 1

Dans le plan \mathcal{P} , on considère les points $A(-2, 0); B(1, 1), C(-1, 3)$ et $M(x, y)$ où x et y sont des réels.

- 1 Écrire $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC}$ en fonction de x et y
- 2 Montrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = BA^2$ est une droite (D) dont on précisera une équation cartésienne et un vecteur directeur \vec{u}
- 3 Montrer que $(D) \perp (BC)$

Exercice 2

Dans le plan \mathcal{P} , on considère les points $A(1, 1); B(2 + \sqrt{3}, \sqrt{3})$ et $C(6, -4)$ et soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (BC) .

- 1 a Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$
b Déduire que $\sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 2 a Calculer la distance AH, puis déduire $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH})$.
b Déduire les coordonnées du point H.

Exercice 3

Dans le plan \mathcal{P} , on considère les points $A(1, \frac{5}{2}); B(1, -\frac{3}{2})$ et $C(-1, \frac{1}{2})$

- 1 Montrer que le triangle ABC est rectangle en C
- 2 a Montrer que $x^2 + y^2 - 2x - y - \frac{11}{4} = 0$ est une équation cartésienne du cercle (C) circonscrit au triangle ABC.
b Déterminer le centre Ω et le rayon du cercle (C)
- 3 Soit (D) la droite d'équation : $x + 2y = 0$.

- a Calculer la distance de Ω à la droite (D) et déduire la position relative de (D) et (C) .
 b Résoudre graphiquement le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - y - \frac{11}{4} \leq 0 \\ x + 2y \leq 0 \end{cases}$$

Exercice 4

- 1 Déterminer la nature de l'ensemble des points $M(x,y)$ dans les cas suivants :

★ $\begin{cases} x = -1 + 3 \cos(\alpha) \\ y = 2 + 3 \sin(\alpha) \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \end{cases}$

★ $\begin{cases} x = 3 + \sqrt{5} \cos(\alpha) \\ y = 1 + \sqrt{5} \sin(\alpha) \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \end{cases}$

- 2 Donner une représentation paramétrique du cercle (C) dans chacun des cas suivants :

★ $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$

★ $x^2 + y^2 - 4x - 16 = 0$

★ $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$

★ $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$

- 3 Déterminer la position du point A par rapport au cercle (C) dans chacun des cas suivants :

★ $A(-1, 1) \quad , \quad x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$

★ $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad , \quad x^2 + y^2 + x = 0$

★ $A(0, 1) \quad , \quad (x - 1)^2 + (y + 2)^2 - 4 = 0$

★ $A(-1, 0) \quad , \quad (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$