SÉRIE 3 : CALCUL TRIGONOMÉTRIQUE

Exercice 1

1. a. Démontrer que pour tout réel $x \neq \frac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ on a :

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2.$$

   b. Exprimer $\tan 3x$ en fonction de $\tan x$.

2. a. Démontrer que $\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2}$ et

$$\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12} = 0.$$

   b. En déduire la valeur exacte de $cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}$.

   c. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation $\cos\frac{\pi}{12}\cos x = \frac{1}{4}$.

   d. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation $\cos\frac{5\pi}{12} - \cos x < 0$.

Exercice 2

1. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation (E) : $\sin 2x = -\sin 3x$ et placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2. a. Montrer que pour tout réel x, $\sin 3x = \sin x\left(4\cos^2 x - 1\right)$

   b. En déduire que $(E) \Leftrightarrow \sin x\left(4\cos^2 x + 2\cos x - 1\right) = 0$

   c. Parmi les solutions de (E) dans $[0, 2\pi[$, quelles sont celles qui sont aussi solution de l'équation $4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$?

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$.

Exercice 3

1. Démontrer que pour tout réel u, on a : $\cos 3u + \cos u = 2\cos 2u \cos u$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos 3u + \cos 2u + \cos u = 0$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$$\cos\left(6x - \frac{3\pi}{5}\right) + \cos\left(4x - \frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$$

Exercice 4

1. a. Montrer que $\dfrac{1}{1+\tan^2 x} = \cos^2 x$ et vérifier que $(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$.
   b. Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation
$$(E) : \frac{2}{1+\tan^2 x} + (1-\sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$
et placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.
   c. Déduire dans $[0, 2\pi]$ les solutions de l'inéquation
$$\frac{2}{1+\tan^2 x} + (1-\sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0.$$
2. On considère l'application
$$\begin{array}{rccc} f & : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{3}\cos(2x) - \sin(2x) \end{array}$$
   a. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f(x) = 2\sin\left(-2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$
   b. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'équation : $f(x) - 1 = 0$
3. a. Soit l'équation $(E) : |\cos x| = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. Exprimer $\cos 2x$ en fonction de $\cos x$.
   b. En déduire que $(E) \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) et placer les images ses solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 5

1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{3}$.
   a. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\times\sin\frac{k\pi}{3}=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right)\right]$$

b Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\times S_n=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{6}\right)\right]$$

b En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$S_n=2\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\times\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{6}\right)$$

2 On pose pour tout entier naturel n tel que $n\geq 2$, $T_n=\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

a Calculer T_2 et T_3

b Prouver que pour tout entier naturel n tel que $n\geq 2$,

$$T_n\times\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)=T_n-\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

c En déduire que pour tout entier naturel n tel que $n\geq 2$,

$$T_n=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$