SÉRIE 3 : ÉTUDE DES FONCTIONS

Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\frac{1}{2}\left(3x-3+\frac{1}{(x-1)^3}\right)$
on désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. a) Déterminer (D_f) le domaine de définition de f .
   b) Montrer que le point $I(1,0)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f) , puis déduire le domaine d'étude de f .
2. Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$
3. Étudier les branches infinies de la courbe (C_f) .
3. a) Montrer que $\forall x\in\,]1,+\infty[\ ,\ f'(x)=\frac{3\left(x^2-2x\right)\left(x^2-2x+2\right)}{2(x-1)^4}$
   b) Étudier les variations de la fonction f sur $]1,+\infty[$ puis dresser son tableau de variation sur (D_f).
   c) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 2.
4. Construire la courbe (C_f) dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
5. Quel est le nombre de solutions de l'équation $3x+\frac{1}{(x-1)^3}=4035$?

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[-3,+\infty[$ par :

$$f(x)=2x+6-4\sqrt{x+3}$$

on désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
   b) Etudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$
2. Calculer $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}$ et interpréter ce résultat graphiquement.

3 a Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]-3,+\infty[$ et que

$$(\forall x \in]-3,+\infty[)\ ,\ f'(x) = \frac{2(x+2)}{\sqrt{x+3}\left(1+\sqrt{x+3}\right)}$$

b Dresser le tableau de variation de f sur $[-3,+\infty[$.

4 a Montrer que $(\forall x \in]-3,+\infty[)\ ,\ f(x)-x = \dfrac{(x+2)(x-6)}{x+6+4\sqrt{x+3}}$

b Etudier la position relative de (C_f) et la droite $(\Delta) :\ y = x$

5 Construire la courbe (C_f) .

6 On considère la suite numérique $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = f(u_n)\ ,\ (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

a Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ ,\ u_n > -2.$

b Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \left(x^2-x-2\right)\sqrt{x} & ;\quad x > 1 \\ f(x) = 2 - \dfrac{9}{2+x} - x & ;\quad x \leq 1 \end{cases}$$

et soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 Calculer $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)$, puis donner une interprétation graphique à ces résultats.

2 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement ce résultat.

3 a Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b Montrer que la droite $(\Delta)\ :\ y = -x+2$ est une asymptote oblique à la courbe $\left(C_f\right)$ au voisinage de $-\infty$.

c Étudier la position relative de $\left(C_f\right)$ et (Δ) sur les intervalles $]-\infty,-2[$ et $]-2,1]$.

4 a Étudier la dérivabilité de f à droite en 1.

b) Étudier la dérivabilité de f à gauche en 1.

c) Est-ce que f est dérivable en 1 ? Justifier votre réponse.

d) Donner une interprétation graphique à ces résultats.

5) a) Montrer que $(\forall x \in]1,+\infty[)$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)(5x+2)}{2\sqrt{x}}$

b) Montrer que $(\forall x \in]-\infty,-2[\cup]-2,1])$, $f'(x) = \dfrac{(1-x)(5+x)}{(x+2)^2}$

c) Déduire que f est strictement décroissante sur $]-\infty,-5]$ et qu'elle est strictement croissante sur $[-5,-2[$ et sur $]-2,+\infty[$.

d) Dresser le tableau de variation de f

6) Déterminer l'équation de la tangente (T) à $\left(C_f\right)$ au point $A(2,0)$.

7) Étudier la concavité de $\left(C_f\right)$ sur chacun des intervalles $]-\infty,-2[$ et $]-2,1]$.

8) Construire $\left(C_f\right)$ et (Δ) dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Exercice 4

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 3\cos^4 x + \sin^4 x - 1$.
On désigne par $\left(C_g\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Montrer que g est π − périodique

2) Montrer que g est paire.

3) Montrer que la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de l'arc de la courbe $\left(C_g\right)$ sur l'intervalle $[0,\pi]$.

4) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, et montrer que son signe est le même que celui de $(1-2\cos x)$.

5) Déduire les variations de g sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

6) Construire $\left(C_0\right)$ l'arc de la courbe $\left(C_g\right)$ correspondant à $[0,\pi]$

7) Construire la partie de la courbe $\left(C_g\right)$ correspondant à $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$