## Exercice 1

On considère la suite arithmétique $(u_n)_{n\geq 1}$ de raison $r=3$ et de premier terme $u_1=4$.

1/ Calculer $u_5$ et $u_{21}$.

2/ Calculer la somme $S=u_1+u_2+...+u_{21}$.

3/ Montrer que $u_1, u_5$ et $u_{21}$ sont dans cet ordre des termes consécutifs d'une suite géométrique.

## Exercice 2

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+2}{2u_n+3}; n\in\mathbb{N} \end{cases}$

Et la suite $(v_n)$ définie par : $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+1}; n\in\mathbb{N}$

1/ Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}; u_n>0$

2/ Calculer $v_0$ et $v_1$ et montrer que: $\forall n\in\mathbb{N}; v_n\neq 1$

3/ a/ Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison .

b/ Déterminer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.

c/ Donner l'expression de la somme $S_n=\sum_{k=1}^{n} v_k$ en fonction de $n$.

## Exercice 3

On considère la suite $(a_n)$ définie par: $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n+n+3; n\in\mathbb{N} \end{cases}$, et la suite $(b_n)$ définie par:

$b_n = a_n - n; n\in\mathbb{N}$.

1/ Montrer que la suite $(b_n)$ est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme .

2/ Déterminer $b_n$ , et montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});\ a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + n$.

3/ a/ Calculer les sommes : $S=1+2+3+...+99$ et $T=1+\left(\dfrac{2}{3}\right)+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+...+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{99}$.

b/ En déduire la valeur de la somme $U=\sum_{k=0}^{99} u_k$.

## Exercice 4

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}; n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1/ Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});\ 0<u_n<3$

2/ a/ Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}); 3-u_{n+1} = \dfrac{3-u_n}{3+u_{n+1}}$

b/ En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}); 0<3-u_{n+1}<\dfrac{1}{3}(3-u_n)$

c/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < 3 - u_n < \left(\frac{1}{3}\right)^n$

3/ On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(3-u_k)$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$

a/ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < S_n < \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$

b/ En déduire un encadrement de $T_n$ en fonction de $n$.

## Exercice 5

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a, b$ et $c$ sont des nombres réels tels que $a \neq 0$ et soit $(v_n)$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = f(n+1) - f(n)$

1/ Donner l'expression de $v_n$ en fonction de $n$

2/ Montrer que $(v_n)$ est une suite arithmétique

3/ Calculer par deux méthodes différentes, en fonction de $n$, la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.



## Exercice 6

On considère la suite numérique $(u_n)$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Soit $(v_n)$ la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \frac{1}{u_n}$

a) Montrer que $(v_n)$ est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Déterminer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.

2) Soit $(w_n)$ la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N});\ w_n = 2^{v_n}$.

a) Montrer que $(w_n)$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b) Calculer en fonction de $n$ la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$

## Exercice 7

On considère les suites numériques $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \ (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases} \quad \text{et } (\forall n \in \mathbb{N}); v_n = 2u_n - n$$

1) Calculer $u_1$ et montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \geq \frac{n}{2}$

2) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)$.

3) a) Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Déterminer $v_n$ en fonction de $n$.

4) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = 2^n + \frac{1}{2}n$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\sum_{k=0}^{n} u_k = 2^{n+1} - 1 + \frac{n(n+1)}{4}$

## Exercice 8

On considère la suite numérique $(u_n)$ définie par : $u_0 = -1$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \frac{4+u_n}{5-u_n}$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $-1 \leq u_n < 2$

2) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)$.

3) On pose : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = \frac{1+u_n}{2-u_n}$.

a) Montrer que $(v_n)$ est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme

b) Calculer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.

4) Soit $(w_n)$ la suite numérique définie par : $w_0 = 1$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N})$; $w_{n+1} = \left(u_n + \frac{5}{n+1}\right)w_n$.

On pose : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a_n = \frac{w_n}{n+1}$ *et* $S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$.

a) Montrer que $(a_n)$ est une suite géométrique

b) Déterminer $a_n$ puis $w_n$ en fonction de $n$.

c) Montre que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $S_n = (n+1)a_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k$ puis déterminer $S_n$ en fonction de $n$.