SÉRIE 4 : ÉTUDE DES FONCTIONS

Exercice 1

Partie 1 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2+1} & ; \quad x < 0 \\ f(x) = \sqrt[3]{x - \arctan x} & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j}$.

1. Étudier la continuité de f en $x_0 = 0$.
2. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$, $\arctan x \leq x$.
2. a. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$, $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5} \leq x - \arctan x \leq \dfrac{x^3}{3}$

   b. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - \arctan x}{x^3}$

   c. Étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$ et en déduire sa dérivabilité en $x_0 = 0$.
4. a. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

   b. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

   c. Dresser la tableau de variation de f .
5. Étudier les branches infinies de la courbe (C_f) .
6. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty, 0[$.

   a. Montrer que g est une bijection de I vers un intervalle J que l'on déterminera.

   b. Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
7. Construire les courbes (C_f) et $(C_{g^{-1}})$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j}$.

Partie 2 :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n - \arctan u_n} & , \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante puis en

déduire qu'elle est convergente.

2 Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad , \quad 0 \leq u_{n+1} \leq \sqrt[3]{\frac{1}{3}} u_n$.

3 Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 2 ≪≫

Partie 1 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \arctan\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1 a Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ puis interpréter graphiquement ce résultat.

b Etudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

2 a Montrer que $\forall x > 0$, $\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

b Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(-x) = \frac{\pi}{2}$

c Déduire que le point $I\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ est un centre de symétrie de (C_f)

3 a Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

b Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{-1}{2(1+x^2)}$

c Dresser le tableau de variation de f .

4 Donner l'équation réduite de la tangente (T) à (C_f) au point I.

5 Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $0 < \alpha < 1$

6 Construire dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ la courbe (C_f) et la droite (T). (On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$)

7 a Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à déterminer. On notera f^{-1} sa fonction réciproque.

b Calculer $f^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

c Construire dans le même repère la courbe $(C_{f^{-1}})$ de f^{-1}.

Partie 2 :

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{\pi}{4} \\ u_{n+1} = f(u_n)\,,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1 Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 0 < u_n < 1$.

2 a Montrer que $(\forall x \in]0,1[\ ,\ |f'(x)| < \dfrac{1}{2}$.

b En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ |u_{n+1} - \alpha| < \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

c Déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Partie 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1 Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution v_n dans $]-\infty, 0[$.

2 Comparer $f(v_{n+1})$ et $f(v_n)$ puis en déduire que la suite (v_n) est strictement croissante.

3 Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Partie 4 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $g_n(x) = f(x) - \left(\sqrt{3}x\right)^n$ où $x \in \mathbb{R}$.

1 Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ \arctan\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) + \dfrac{1}{2}\arctan x = \dfrac{\pi}{4}$

2 a Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution w_n dans $\mathbb{R}$.

b Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 0 < w_n < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

3 a Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ g_{n+1}(x) > g_n(x)$.

b Déduire que la suite $\left(w_n\right)$ est strictement croissante et qu'elle est convergente.

c Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(w_n\right)^n$

4 On pose $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L$

a Montrer que $0 < L \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

b On suppose que $L < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 0 < w_n \leq L < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

et en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{3}w_n\right)^n = 0$

c Déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.