# SÉRIE 5 : ÉTUDE DES FONCTIONS

## Exercice 1

### Partie 1 :

Soit $g$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x) = (1+x^2)\arctan(x) - x$$

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = +\infty$ puis donner une interprétation graphique de ce résultat.
2. Montrer que pour tout $(x \in \mathbb{R}^+)$, $g'(x) = 2x\arctan(x)$
3. Montrer que $g$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.
4. Déduire que pour tout entier naturel non nul n, l'équation $g(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution $a_n$ dans $\mathbb{R}^+$.
5. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
6. Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $h(x) = g\left(\sqrt[3]{x}\right)$ Montrer que $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $\forall x > 0$, $h'(x) = \dfrac{2}{3}\dfrac{\arctan\left(\sqrt[3]{x}\right)}{\left(\sqrt[3]{x}\right)}$
7. Soit $x > 0$, en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $h$, montrer que : $\exists c \in \left]0, x^3\right[ \ : \dfrac{g(x)}{x^3} = \dfrac{2}{3}\dfrac{\arctan\left(\sqrt[3]{c}\right)}{\left(\sqrt[3]{c}\right)}$
8. Soit $x > 0$, en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction arctan , montrer que : $\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{1+x^2} < \dfrac{g(x)}{x^3} < \dfrac{2}{3}$
8. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n}\, a_n$

### Partie 2 :

Soit $f$ la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{g(x)}{x^2} \quad , \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé

$\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 En utilisant la question 8 de la partie 1, montrer que $f$ est dérivable à droite en 0.

2 Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ et donner une interprétation graphique de ce résultat.

3 Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, \ f'(x) = 2\frac{x - \arctan(x)}{x^3}$$

4 a Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, \ 0 < x - \arctan(x) < \frac{1}{3}x^3$

b Déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}, \ 0 < f'(x) < \frac{2}{3}$

5 Construire la courbe $(C_f)$ .

6 Montrer que l'équation $(E)$ : $f(x+1) = x$ admet une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $[0,1]$. (On donne $f(2) < 1$ et $f(1) > 0$

7 On définit deux suites numériques $(v_n)$ et $(w_n)$ définies par :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \ , \ w_0 = 1 \\ v_{n+1} = f(1+v_n) \ , \ w_{n+1} = f(1+w_n) \end{cases}$$

a Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N} \ , \ 0 < v_n < v_{n+1} < \alpha < w_{n+1} < w_n < 1$$

b Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N} \ , \ 0 < w_{n+1} - v_{n+1} < \frac{2}{3}\left(w_n - v_n\right)$$

c Déduire que $(v_n)$ et $(w_n)$ sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

**Exercice 2** ≮≯≮≯≮≯≮≯≮≯≮≯≮≯≮≯≮≯≮≯≮≯≮≯≮≯≮≯≮≯≮≯≮≯≮≯≮≯≮≯

**Partie 1 :**

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^{+}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x}{x + \arctan(x)} \quad , \quad x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1 Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement ce résultat.

2. Montrer que la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3. a. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$, $1 - x^2 \leq \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$

   b. En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$, $x - \dfrac{1}{3}x^3 \leq \arctan(x) \leq x$.

   c. Montrer que $f$ est dérivable à droite en 0 et préciser $f'_d(0)$.

4. a. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})$, $f'(x) = \dfrac{2\left(\arctan(x) - \dfrac{x}{1+x^2}\right)}{\left(x + \arctan(x)\right)^2}$.

   b. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})$, $\arctan(x) > \dfrac{x}{1+x^2}$ et en déduire que $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

5. a. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$ où $g(x) = x - 2 + \arctan(x)$.

   b. Montrer qua la fonction $g$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $[-2, +\infty[$. puis en déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}^+$ et que $1 < \alpha < 2$.

   c. Justifier que la fonction $g'$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

   d. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $1 \leq x < \alpha$. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $x - \dfrac{g(x)}{g'(x)} < \alpha$.

## Partie 2 :

On considère la suite numérique $(u_n)$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{g(u_n)}{g'(u_n)} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$, $1 \leq u_n < \alpha$.

2. Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante et déduire qu'elle est convergente.

3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.