SÉRIE 7: LES SUITES NUMÉRIQUES

Exercice 1

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 3$.
On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f_n(x) = x^n + x^2 + x - 1$ et soit α la solution positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.

1. Sans déterminer α, montrer que $0 < \alpha < 1$.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}^+$ une unique solution notée u_n.
3. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $0 < u_n < \alpha$.
4. Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\geq 3}$ est croissante et convergente.
5. Montrer que $(\forall n \geq 3)$, $u_n^n + \left(u_n - \alpha\right)\left(u_n + \frac{1}{n}\right) = 0$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 2

Pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2$, on pose : $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$.

1. Montrer que $(\forall n \geq 2)$, $a_n \geq 0$.
2. Montrer que $(\forall n \geq 2)$, $n \geq C_n^2 (a_n)^2$ et en déduire que
$(\forall n \geq 2)$, $a_n \leq \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$.
3. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.
On considère la fonction h_n définie sur l'intervalle $]0,1[$ par :
$h_n(x) = (1-x)(x+1)^n$.

1. Étudier les variations de la fonction h_n sur $]0,1[$.
2. Montrer que l'équation $h_n(x) = 1$ admet dans$]0,1[$ une unique solution notée x_n.
3.
   a. Montrer que : $\left(\forall x \in]0,1[\right)$, $h_{n+1}(x) < h_n(x)$.
   b. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $x_{n+1} \in \left]\dfrac{n-1}{n+1}, 1\right[$.
   c. Étudier la monotonie de la suite $\left(x_n\right)$.

d) Calculer $\lim_{n\to+\infty} x_n$

Exercice 4

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par : $u_n=\sum_{k=0}^{2n+1}\left(\frac{n}{n^2+k}\right)$.

1) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$, $\frac{2n}{n+1}\leq u_n\leq\frac{2n+2}{n}$, puis calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $v_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)$ et $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$.

a) Montrer que : $\left(\forall k\in\mathbb{N}^*\right)$, $\frac{1}{2k}\leq\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$, puis déduire que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$, $v_n\leq 2\sqrt{n}$.

b) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$, $2n+2-2v_{n+1}\leq S_n\leq 2n+2v_n$.

c) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$, $2n-4\sqrt{n+1}\leq S_n\leq 2n+4\sqrt{n}$.

3) Calculer les limites $\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}$.

Exercice 5

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $U_n=\frac{1}{2\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

1) Montrer que $(\forall n\geq 1)$, $\frac{1}{2\sqrt{k+1}}\leq\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\leq\frac{1}{2\sqrt{k}}$.

2) Déduire un encadrement de U_n.

3) Montrer que la suite $\left(U_n\right)_{n\geq 1}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 6

1) Pour tout entier naturel non nul n , on considère l'équation

$$(E_n):\ x^3+5x=n$$

. a) Montrer que l'équation (E_n) admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution notée α_n et que $\alpha_n>0$.

b) Montrer que $\alpha_1<\frac{1}{5}$.

c) Montrer que la suite (α_n) est croissante et déterminer sa limite.

2) a) Prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $\alpha_n \leq \sqrt[3]{n}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_n}{n}$.

b) Vérifier que $\left(\dfrac{\alpha_n}{\sqrt[3]{n}}\right)^3 + 5\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right) = 1$, puis déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_n}{\sqrt[3]{n}} = 1$.

Exercice 7

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+u_n} \text{ , } \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Calculer les termes u_1 ; u_2 ; u_3.

2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N} \text{ ; } 1 \leq u_n \leq \dfrac{3}{2}$

3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ ; } |u_{n+1} - u_n| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - u_{n-1}|$

4) Pour tout entier naturel n , on pose $\alpha_n = u_{2n}$ et $\beta_n = u_{2n+1}$. Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N} \text{ ; } \beta_n = 1 + \frac{1}{1+\alpha_n}$.

5) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N} \text{ ; } \alpha_n \leq \beta_n$.

6) Montrer que la suite (α_n) est croissante et que la suite (β_n) est décroissante.

7) Montrer que les suites (α_n) et (β_n) convergent vers la même limite.

8) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N} \text{ ; } |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - \sqrt{2}|$.

9) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.
On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = x^3 + x^2 - nx - 1$$

1) a) Calculer $f_n'(x)$, puis résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation $f_n'(x) = 0$. On note par α_n cette solution.

b) Montrer que : $\alpha_n^2 = \dfrac{n-2\alpha_n}{3}$. Puis déterminer deux nombres rationnels u_n et v_n tels que $f_n(\alpha_n) = u_n + v_n u_n$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$.

2) a) Montrer que l'équation $f_n'(x) = 0$. admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}^+$.

b Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq 2)\ ,\ \alpha_n < x_n < \sqrt{n}$.

c Déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

d Etudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geq 2}$.

3 a Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geq 2)\ ,\ n = x_n^2 + x_n - \dfrac{1}{x_n}$.

b Déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{x_n} = 1$.